1 Grundlagen

1.1 Algebra

Additives Rechnen in der Algebra beinhaltet verechnen von gleichem mit gleichem (ab mit ab; b^2 mit b^2):

$$\begin{aligned} 3m^2 - (m + m^2) + 5m &= 3m^2 - m - m^2 + 5m = \\ &= 2m^2 - m + 5m = \\ &= 2m^2 + 4m \end{aligned}$$

Bei multiplikativem Rechnen wird alles miteinander multipliziert, wobei Exponenten addiert, beziehungsweise subtrahiert werden:

$$\begin{aligned} x^2(x^3 + x^4) &= x^2 * x^3 + x^2 * x^4 = \\ &= x^5 + x^6 \end{aligned}$$

a^0 ist immer 1:

$$\frac{a^2}{a^2} = a^{2-2} = a^0 = 1$$

1.2 Gleichungen

Rechenschritte muessen immer auf beiden Seiten vollzogen werden:

$$\begin{aligned} -3x &= 15 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

$$L = \{5\}$$

Die Loesungsmenge muss immer in der Form $L = \{Loesung1; Loesung2...\}$ angegeben werden.

1.3 Ungleichungen

Bei einer multiplikativen Veraenderung dreht sich das Zeichen um:

$$\begin{aligned} -3 &< 1 \\ 3 &> -1 \end{aligned}$$

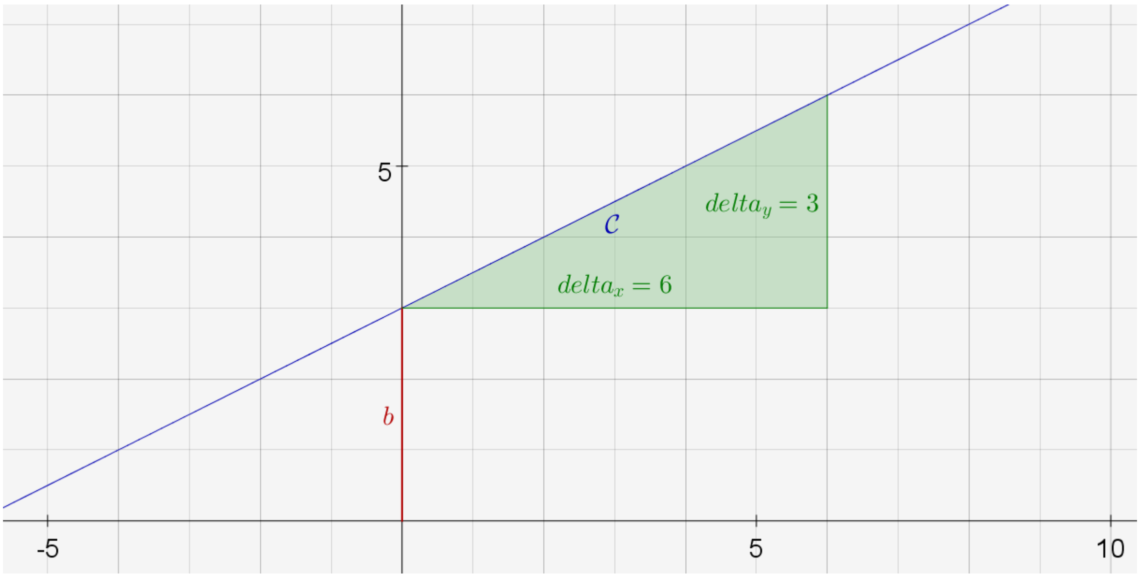
1.4 Lineare Funktionen (Geraden)

1.4.1 Funktionen allgemein

"Funktionen ordnen einem x-Wert einen eindeutigen y-Wert zu."

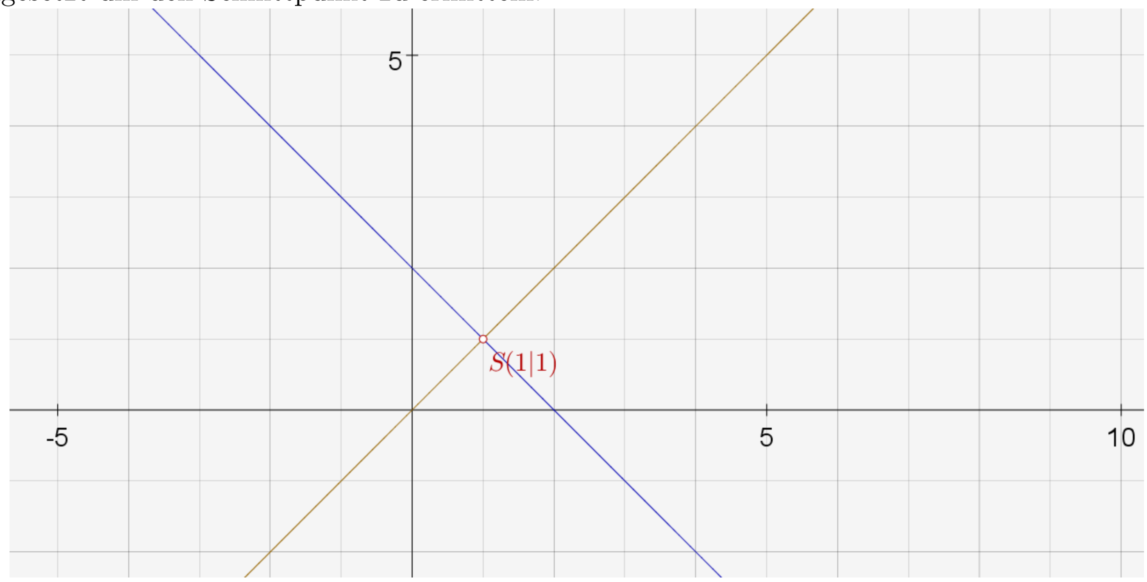
1.4.2 Lineare Funktionen

$c(x) = a * x + b$



b ist der y-Achsenabschnitt, wie in der Skizze rot eingezeichnet, mittels des Steigungsdreiecks und den jeweiligen Seitenlaenge in y- oder x-Richtung kann die Steigung als Verhaeltnis von $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ dargestellt werden.

Beim Schneiden von zwei Geraden wie in der unteren Graphik gezeigt, werden die Funktionen gleichgesetzt um den Schnittpunkt zu ermitteln:



$$\begin{aligned} -x + 2 &= x \\ 2 &= 2x \\ 1 &= x \end{aligned}$$

$$L = \{1\}$$

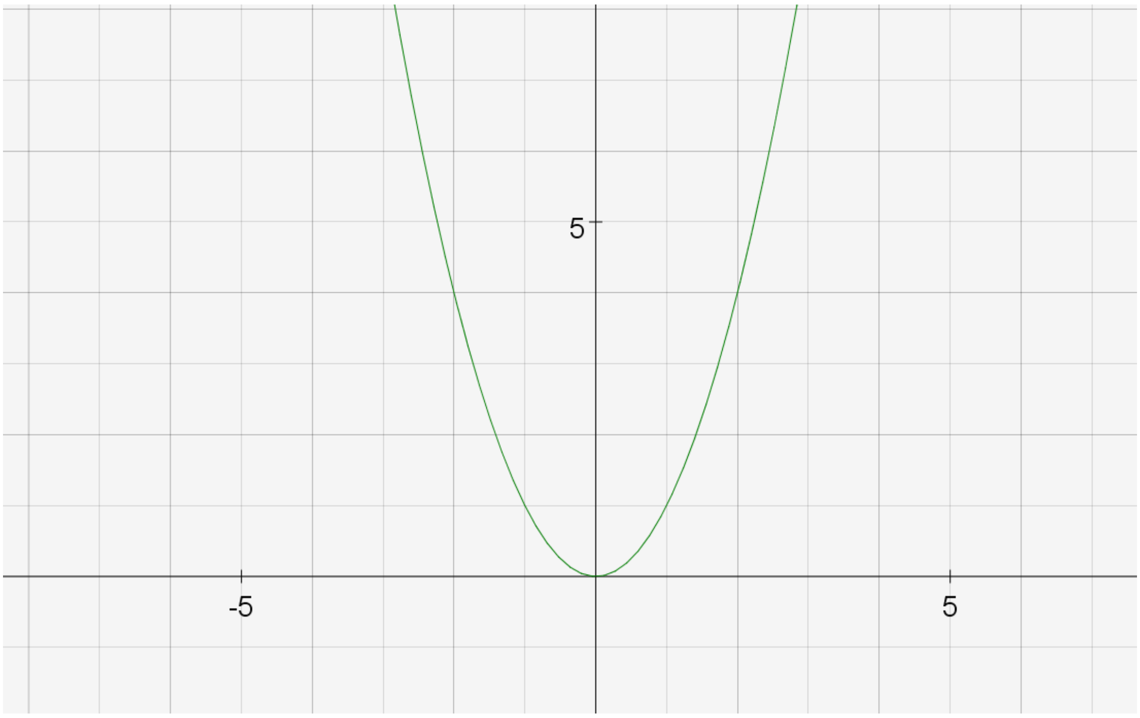
2 Quadratische Funktionen

Allgemein: $f(x) = ax^2 + bx + c$

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= -2x^2 + 3 \\
&\Rightarrow a = -2 \\
&\Rightarrow b = 0 \\
&\Rightarrow c = 3
\end{aligned}
$$

Graph:



2.1 Quadratische Gleichungen

$ax^2 + bx + c = 0$

Loesungsvarianten:

1. "Mitternachtsformel": $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4*a*c}}{2*a}$
2. Wenn $c = 0$:

$$
\begin{aligned}
x^2 &= -7x \\
x^2 + 7x &= 0 \\
x(x+7) &= 0
\end{aligned}
$$

   $\Rightarrow$ Daraus folgt: $x_1 = 0$; $x_2 = -7$, da ein Teil des Produkts null sein muss.

3. Quadratisches Ergaenzen:
   Ziel: Binom $a^2 + 2ab + b^2$

$$
\begin{aligned}
x^2 - 9x + 20 &= 0 \\
x^2 - 9x &= -20 \\
x^2 - 9x + \left(\frac{9}{2}\right)^2 &= -20 + \left(\frac{9}{2}\right)^2 \\
(x - 4.5)^2 &= 0.25
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow x_1 = 5 \\
&\Rightarrow x_2 = 4
\end{aligned}
$$

$$L = \{4; 5\}$$

2.2 Anwendungen

1. Biquadratische Gleichung:
   Beispiel: $2x^4 - 3x^2 - 20 = 0$
   Substitution $u := x^2$

$$
\begin{aligned}
2u^2 - 3u - 20 &= 0 \\
&\Rightarrow u_1 = -\frac{5}{2} \\
&\Rightarrow u_2 = 4
\end{aligned}
$$

   Ruecksubstitution:
   $x^2 = -\frac{5}{2}$
   $L_1 = \{\}$

   $x^2 = 4$
   $L_2 = \{\pm 2\}$

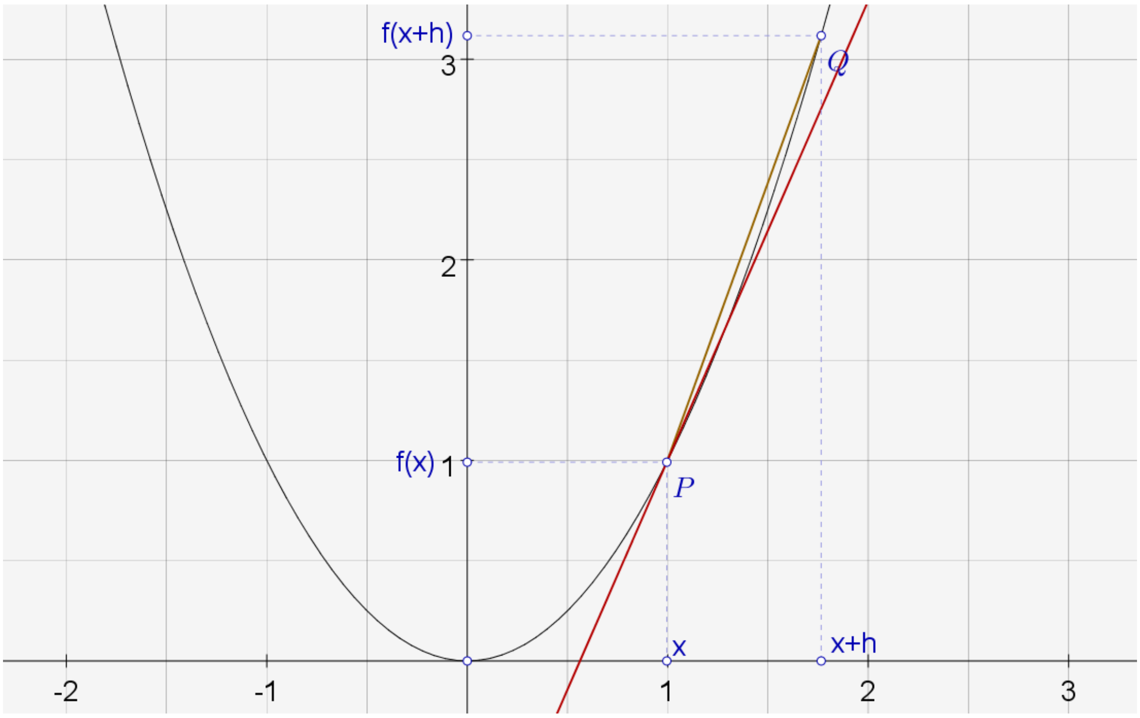
2. Parameter:
   Fuer welche Werte von k hat die Gleichung keine Loesung? $x^2 - 2x + 1 + k = 0$

$$\begin{aligned} D &= (-2)^2 - 4 * 1 * (1 + k) \\ &= 4 - 4 - 4k \\ &= -4k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &0 > -4k \\ &k > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &L =]0; \infty[\\ &L = \{k \in R \mid k > 0\} \end{aligned}$$

3 Differentialrechnung (Ableiten)



Das Ziel des Ableitens ist die Auffindung der Tangentensteigung durch einen Punkt.

1. Schritt: Sekantensteigung bestimmen

$$m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

2. Schritt: Wir lassen die Sekante zur Tangente werden, indem wir h immer kleiner machen und dabei die Sekantensteigung beobachten

$$m_t = \lim_{h \to 0} m_s$$

Beispiel: Funktion $f(x) = x^2$; Punkt $P(x|f(x))$

$$\begin{aligned} m_t &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \\ &= \lim_{h \to 0} 2x + h = \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2 * x$$

3.1 Graphisches Ableiten

Beim graphischen Ableiten wird durch Ueberlegung wo die Steigung null ist (Scheitelpunkte der Ausgangsfunktion) und wo die Steigung steiler wird, wo negativ und wo positiv ist eine qualitative Funktion gezeichnet:

3.2 Ableitungsregeln

Das Ableiten muss nicht immer von Hand hergeleitet werden. Es gibt eine einfache Merkregel:

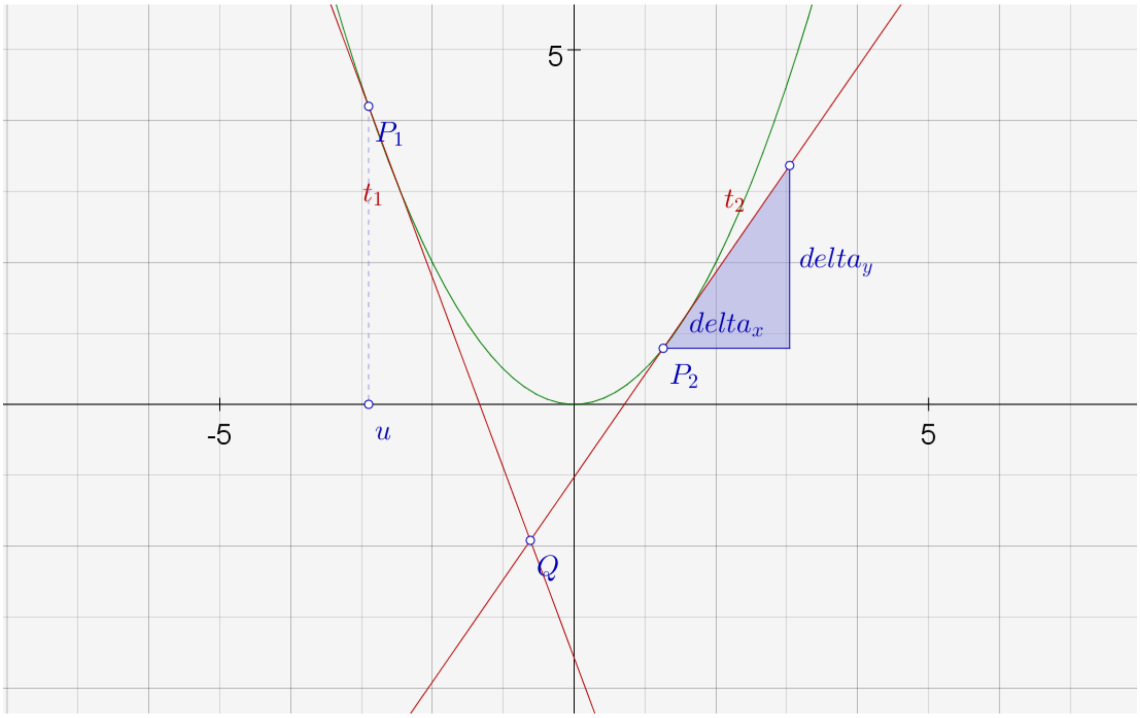
$$f(x) = x^n$$
$$f'(x) = n * x^{n-1}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - x^3 - x^2 - x + 9 \\ f'(x) &= 4 * x^{4-1} - 3 * x^{3-1} - 2 * x^{2-1} - 1 * x^{1-1} \\ &= 4 * x^3 - 3 * x^2 - 2 * x^1 - 1 \end{aligned}$$

3.3 Tangenten durch einen funktionsfremden Punkt

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{1}{4} * x^2$ und der Punkt $Q(-1|-2)$. Skizze:



Man nimmt fr den Beruehrpunkt die x-Koordinate u an. Daraus Ergibt sich:

$$P_1(u|f(u)) \Rightarrow P_1\left(u\middle|\frac{1}{4} * u^2\right)$$

Grundsaetzliche Idee: Ausdruecken der Steigung in zwei verschiedenen Arten:

1. Steigungsdreieck

$$m_t = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{1}{4} * u^2 + 2}{u + 1}$$

2. Ableitungsfunktion

$$m_t : f'(x) = \frac{1}{2} * x \Rightarrow f'(u) = \frac{1}{2} * u$$

Durch die Gleichsetzung der beiden Steigungsvarianten ergibt sich eine Parabel, die mit der Mitternachtsformel loesbar ist.

3.4 Parameteraufgaben

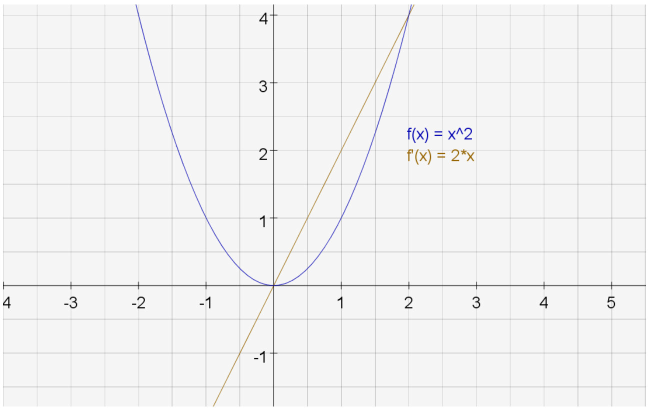
$\Rightarrow$ Theorieaufgabe auf Seite 38 von Differential- und Integralrechnung I

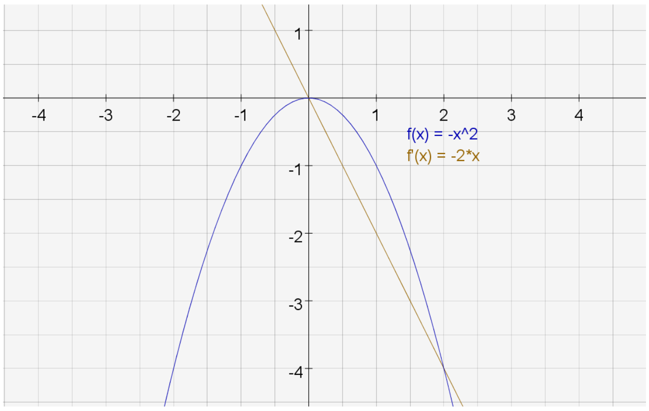
4 Kurvendiskussion

4.1 Einleitung

Unter Kurvendiskussion versteht man die Untersuchung von Funktionen auf bestimmte geometrische Eigenschaften.

4.2 Hoch- und Tiefpunkte (Extremwerte)





Bei einem Hochpunkt gilt:

$$f'(x_H) = 0$$
$$f''(x_H) > 0$$

Bei einem Tiefpunkt gilt:

$$f'(x_T) = 0$$
$$f''(x_T) < 0$$

Verdeutlichung mittels eines Zahlenbeispiels: Gegeben ist $f(x) = -2 * x^3 + 5 * x$.
Daraus folgt:

$$f'(x) = -6 * x^2 + 5$$
$$f''(x) = -12 * x$$

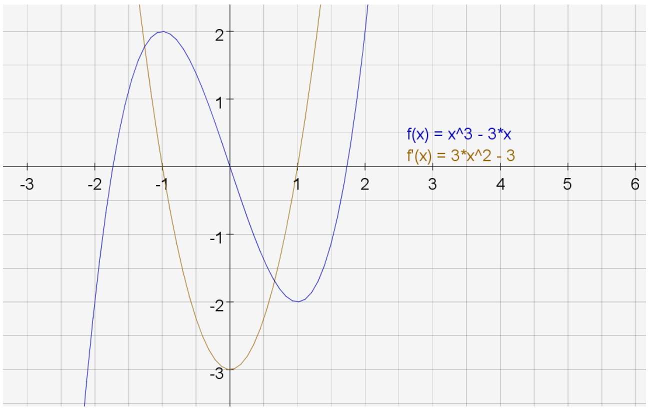
1. $f'(x) = 0$:

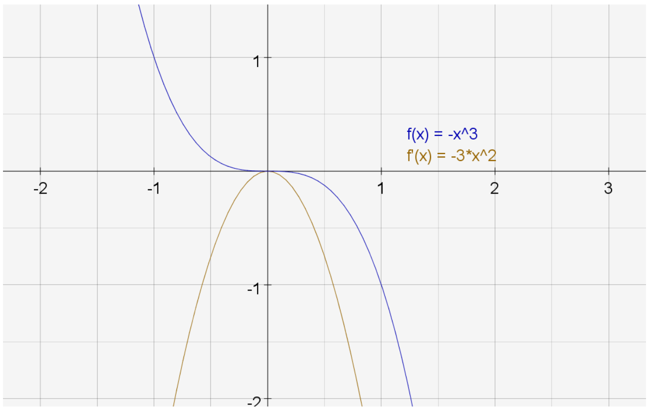
$$-6 * x^2 + 5 = 0$$
$$\frac{5}{6} = x^2$$
$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{5}{6}}$$

2. $f''(x_{1,2})$:

$$f''\left(\sqrt{\frac{5}{6}}\right) = -12 * \sqrt{\frac{5}{6}} \Rightarrow negativ(-) \Rightarrow Hochpunkt$$
$$f''\left(-\sqrt{\frac{5}{6}}\right) = -12 * \left(-\sqrt{\frac{5}{6}}\right) \Rightarrow positiv(+) \Rightarrow Tiefpunkt$$

4.3 Wendepunkte





Bei Wendepunkten gilt (links):

$$f''(x_W) = 0$$
$$f'''(x_W) \neq 0$$

Bei Sattelpunkten gilt (rechts):

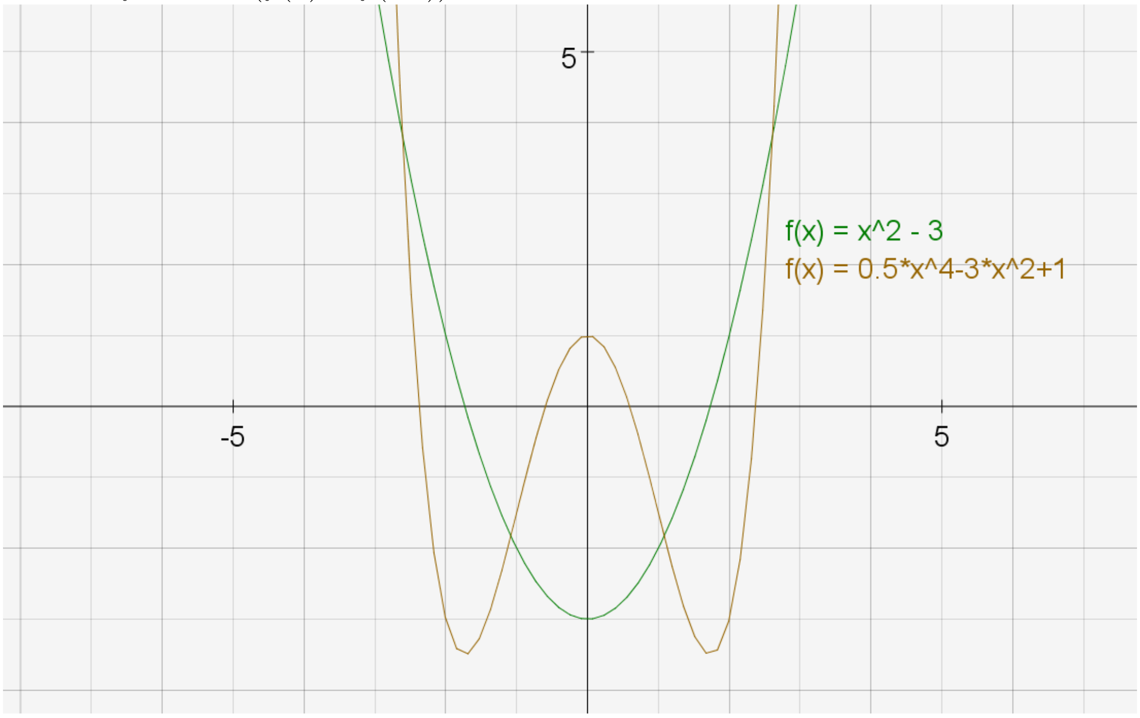
$$f'(x_S) = 0$$
$$f''(x_S) = 0$$
$$f'''(x_S) \neq 0$$

4.4 Nullstellen

Die Nullstellen koennen mit den normalen Mitteln, die in den vorangegangenen Seiten beschrieben wurden ermittelt werden.

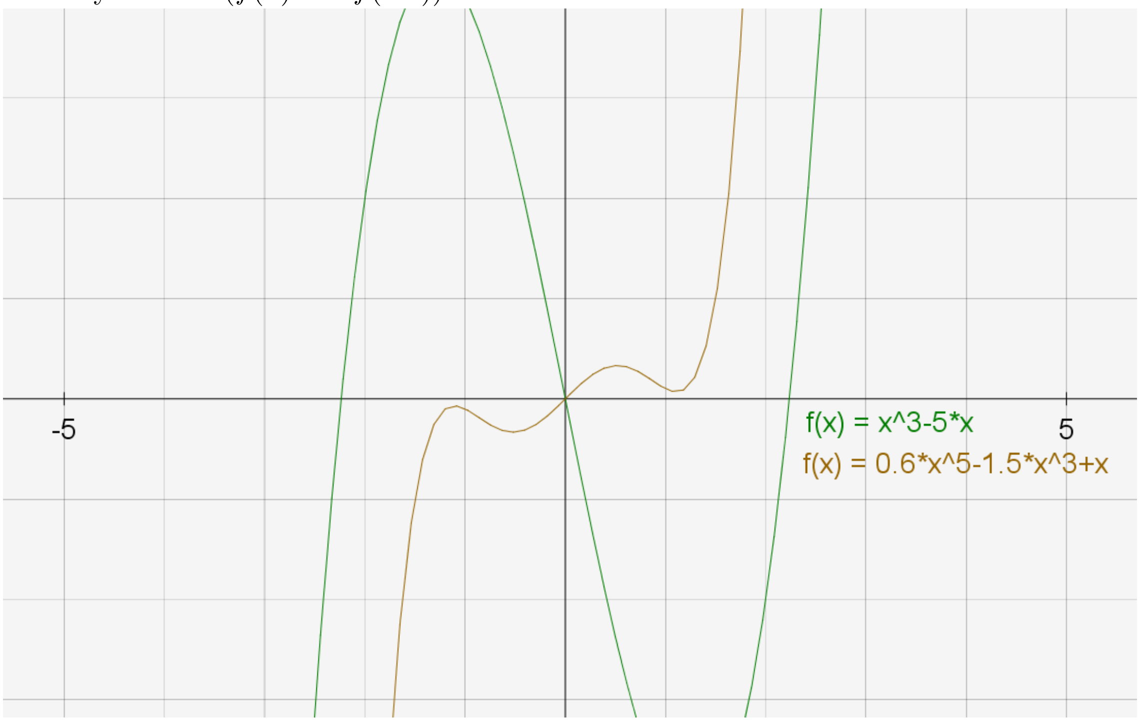
4.5 Symmetrie

1. Geradensymmetrie ($f(x) = f(-x)$):



   Wenn alle Exponenten der Funktion gerade oder 0 sind, so ist die Funktion symmetrisch zur y-Achse.

2. Punktsymmetrie ($f(x) = -f(-x)$):



   Wenn alle Exponenten der Funktion ungerade sind, so ist die Funktion symmetrisch zum Ursprungspunkt des Koordinatensystems.

5 Interpolation

Bei der Interpolation soll eine Funktion gefunden werden, die bestimmte Eigenschaften (siehe Kurvendiskussion) erfuellen soll. Dabei kann auch die Symmetrie einer Funktion von entscheidendem Hinweise sein, da unter Umstaenden direkt mehrere Variablen nullgesetzt werden koennen.

5.1 Rechenbeispiel

Eine Funktion dritten Grades hat bei $x = 2$ und $x = 1$ eine Nullstelle und bei $W(-2|2)$ einen Wendepunkt. Wie lautet die Funktionsgleichung?

1. Ansatz:
   Da es eine Funktion dritten Grades ist sind folgende Gleichungen anzunehmen:

   (a) $f(x) = a * x^3 + b * x^2 + c * x + d$
   (b) $f'(x) = 3 * a * x^2 + 2 * b * x + c$
   (c) $f''(x) = 6 * a * x + 2 * b$

2. Gleichungen aufstellen:

   (a) $f(2) = 0 \Rightarrow 0 = a * 2^3 + b * 2^2 + c * 2 + d$
   (b) $f(1) = 0 \Rightarrow 0 = a * 1^3 + b * 1^2 + c * 1 + d$
   (c) $f(-2) = 2 \Rightarrow 2 = a * (-2)^3 + b * (-2)^2 + c * (-2) + d$
   (d) $f''(-2) = 0 \Rightarrow 0 = 6 * a * (-2) + 2 * b$

3. Gleichungssystem loesen:

$$0 = 8 * a + 4 * b + 2 * c + d \tag{1}$$
$$0 = a + b + c + d \tag{2}$$
$$2 = -8 * a + 4 * b - 2 * c + d \tag{3}$$
$$0 = -12 * a + 2 * b \tag{4}$$

6 Newton-Verfahren

Das Newton-Verfahren ist ein Naeherungsverfahren zum finden von Nullstellen. Es funktioniert grundsaetzlich durch die Idee, dass eine Tangente an einem geschickten Startwert die Nullstelle nahe am Nullpunkt hat. Mit dieser Nullstelle als neuen Startwert kann man sich der Nullstelle beliegig naehern.
Ziel: $x^3 + 2 * x - 5 = 0$

$$m_T = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}$$
$$m_T = f'(x_0)$$

$$\Rightarrow f'(x_0) * (x_0 - x_1) = f(x_0)$$
$$\Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$
$$\Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Zahlenbeispiel mit obiger Gleichung:

$$f(x) = x^3 + 2 * x - 5$$
$$f'(x) = 3 * x^2 + 2$$

$$Startwert = 2.5$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{2.5^3 + 2 * 2.5 - 5}{3 * (2.5)^2 + 2} = 1.747$$
$$\Rightarrow x_2 = 1.404$$
$$\Rightarrow x_3 = 1.331$$
$$\Rightarrow x_4 = 1.328$$

6.1 Newton-Verfahren zur Wurzelbestimmung

1. Gleichung aufstellen und loesen:

$$\begin{aligned} \sqrt{7} &= x \\ 7 &= x^2 \\ 0 &= x^2 - 7 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2 * x$$

2. Startwert definieren: Startwert 2 da $2^2 = 4$ und $3^2 = 9$

3. Newton-Verfahren:

$$\begin{aligned} x_1 = 2 - \frac{2^2 - 7}{2 * 2} &= 2.75... \\ &= 2.64575... \end{aligned}$$

7 Extremwertaufgaben

Beispielaufgabe: Eine moeglichst grosse Flaeche an einer Mauer muss mit 200m Zaun abgetrennt werden.

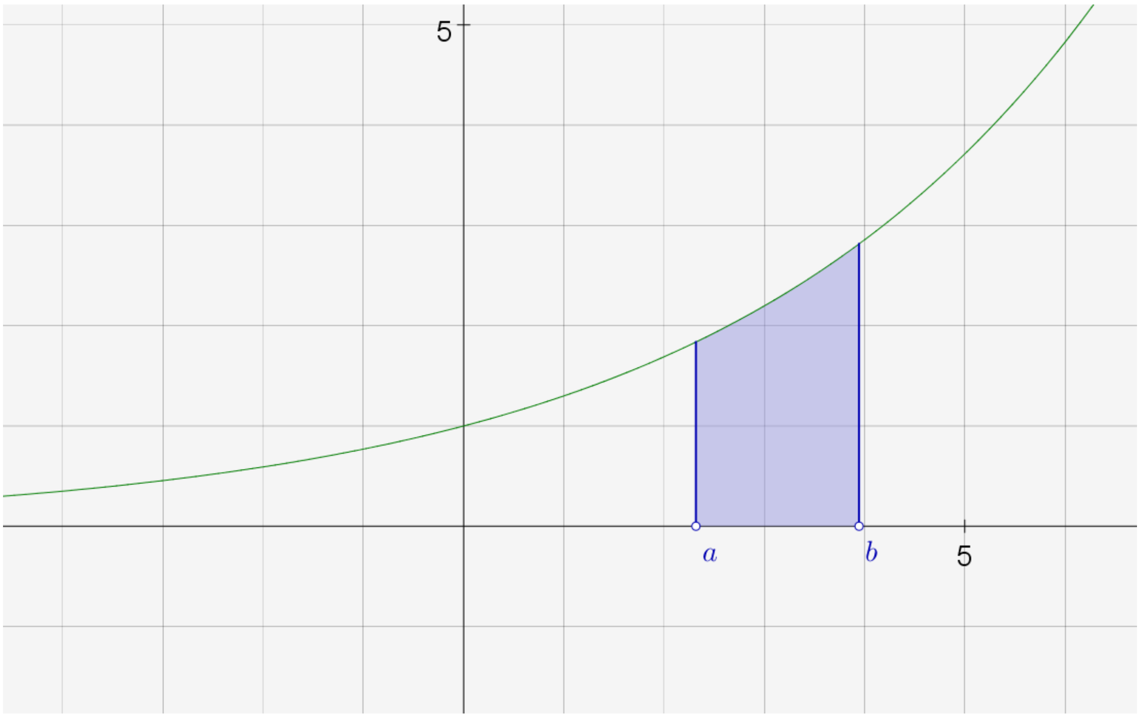
Vorgehen zur Loesung:

1. Extrembedingung ("Was soll extremal sein?"): $A = x * y$
2. Nebenbedingung: $200m = x + 2 * y$
3. Zielfunktion durch einsetzen der Nebenbedingung in die Hauptbedingung:
   $A(x) = x * \left(100 - \frac{x}{2}\right) \Rightarrow A(x) = 100 * x - \frac{1}{2} * x^2$
4. Hochpunkt bestimmen

Ist als Bedingung ein Punkt auf einer Funktion gegeben, so ist die Funktionsgleichung als Nebenbedingung zu verwenden.

8 Integralrechnung

$\Rightarrow$ Erster Teil der Theorie in separatem Word-Dokument.



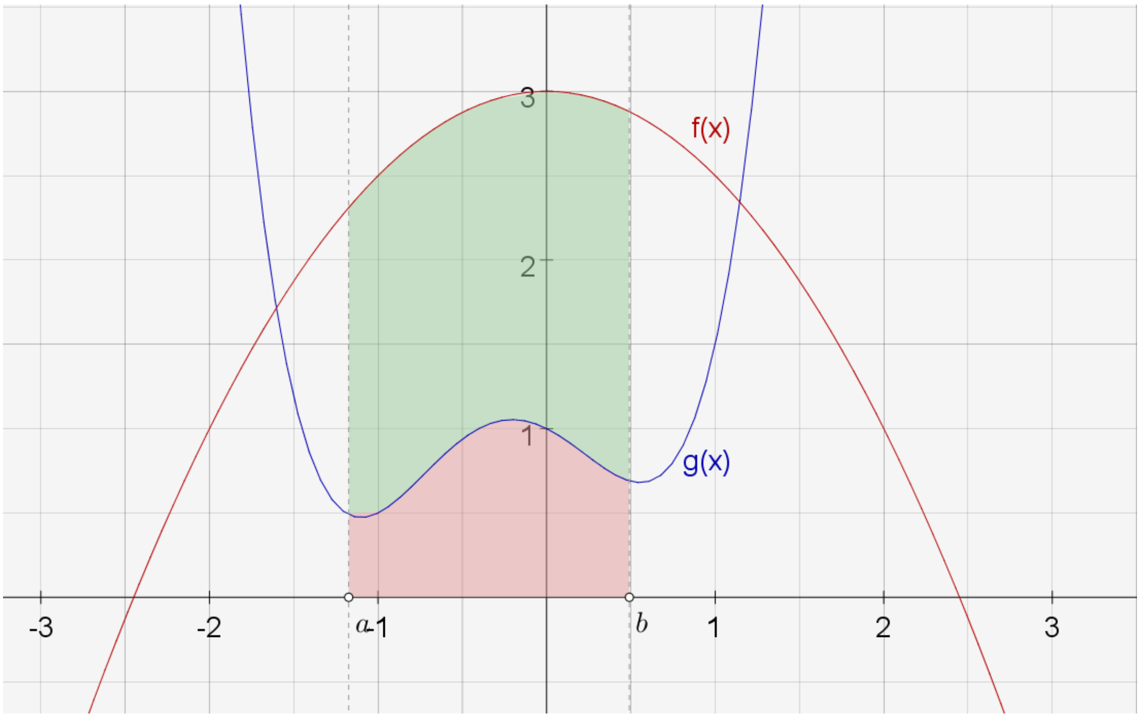
Flaeche: $F_a(b)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = [G(x)]_a^b$$

$$\int_1^2 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3} * x^3\right]_1^2$$

Achtung: Ist die Funktion $f(x) < 0$ im Intervall $[a, b]$ dann ist $\int_a^b f(x)\,dx < 0$. Geht die zu berechnende Flaeche ueber den Nullpunkt so kann das Resultat 0 oder einen zu kleinen Wert ergeben. Darum Graph skizzieren!

8.1 Flaeche zwischen Funktionsgraphen



Eingeschlossene Flaeche: $F_{gruen} = F_{gesamt} - F_{rot}$

$$
\begin{aligned}
A_{gruen} &= \int\limits_a^b f(x)\,dx - \int\limits_a^b g(x)\,dx \\
&= \int\limits_a^b f(x) - g(x)\,dx
\end{aligned}
$$

Daraus folgt:

$$
\begin{aligned}
&f(x) = g(x) \\
&\Rightarrow h(x) = f(x) - g(x) \\
A_{gruen} &= \int\limits_a^b h(x)\,dx
\end{aligned}
$$

Durch voriges Gleichsetzen der beiden Funktionsgleichungen kann die Rechenarbeit verringert werden da nur noch ein Integral ausgerechnet werden muss!