1 Ableitungsregeln

1.1 Produkteregel

Bei Funktionen die multplikativ verbunden sind gilt:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= u(x) \cdot v(x) \\
f'(x) &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)
\end{aligned}
$$

Herleitung

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) \cdot v(x+h) - u(x) \cdot v(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) \cdot v(x+h) + u(x+h) \cdot v(x) - u(x+h) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) \cdot (v(x+h) - v(x)) + v(x) \cdot (u(x+h) - u(x))}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} u(x+h) \cdot \frac{v(x+h) - v(x)}{h} + v(x) \cdot \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \\
&\Rightarrow u(x) \cdot v'(x) + v(x) \cdot u'(x)
\end{aligned}
$$

1.2 Quotientenregel

Bei Funktionen die mittels einer Division verbunden sind gilt:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{u(x)}{v(x)} \\
f'(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2}
\end{aligned}
$$

Herleitung

$$
\begin{aligned}
\frac{u(x)}{v(x)} \cdot v(x) &= u(x) \\
\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' \cdot v(x) + \left(\frac{u(x)}{v(x)}\right) \cdot v'(x) &= u'(x) \\
\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' \cdot v(x) &= u'(x) - \left(\frac{u(x)}{v(x)}\right) \cdot v'(x) \\
\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' \cdot v(x) &= \left(\frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)}\right) \\
\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' &= \left(\frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}\right)
\end{aligned}
$$

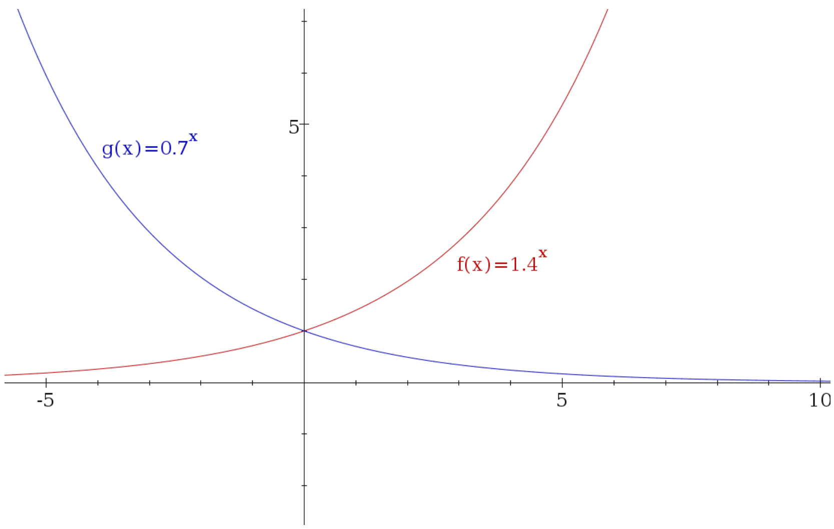
1.3 Kettenregel

Bei Funktionen die ineinander verkettet sind, also das Resultat einer Funktion in eine weitere Funktion eingesetzt wird gilt für die innere Funktion f_i und die äussere Funktion f_a:

$$f(x) = f_a(f_i(x))$$
$$f'(x) = f_a'(x) \cdot f_i'(x)$$

2 Exponentialfunktionen

2.1 Einführung

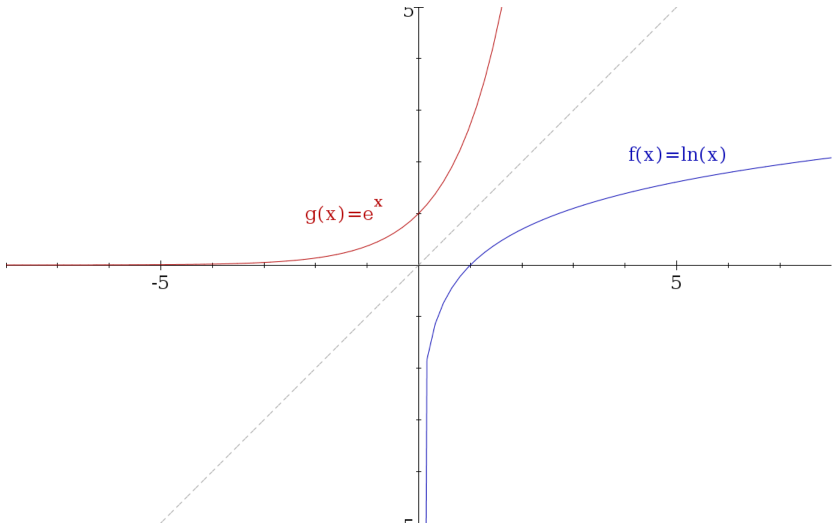


Bisher haben wir nur Potenzfunktionen wie $f(x) = x^2 - 2 \cdot x - 9$ gesehen und abgeleitet bzw. integriert. Bei Exponentialfunktionen ist die Variable nun im Exponent wie $g(x) = 2^x$.
Alle Exponentialfunktionen gehen durch den Punkt $P(0/1)$. Die Funktion $f(x) = e^x$ ist ein Sonderfall: ihre Basis ist die Eulersche Zahl ($e = 2.7182...$). Ihre Ableitung ist die Fuktion selber ($f'(x) = e^x$), der y-Wert ist also die Steigung an diesem Punkt.

2.2 Exponentielles Wachstum

Wir brauchen die Exponentialfunktin zur Beschreibung von exponentiellem Wachstum oder Zerfall. Wir benutzen hierzu die Grundgleichung $f(x) = a \cdot b^x$, wobei a der Startwert, b das prozentuale Wachstum und x die Zeit darstellt. Muss der Zeitfaktor noch angepasst werden (ist z.B. die Wachstumsrate für mehrere Jahre gegeben) kann die Gleichung mit einem "Berichtigungsfaktor" n erweitert: $f(x) = a \cdot b^{\frac{x}{n}}$.

3 Logarithmusfunktionen



3.1 Logarithmen

Logarithmen sind die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion. Der Logarithmus ist wiefolgt definiert:

$$\log_a(b) = x \Leftrightarrow a^x = b$$

Alle Logarithmen können also gelöst werden in dem man sich fragt mit welcher Zahl man a potenzieren muss, um b zu erhalten.
Wegen ihrer weiten Verbreitung erhalten der Logarithmus zur Basis 10 und zur Basis e spezielle Namen: Der Logarithmus zur Basis 10 heisst auch: $\log_{10} = \log = \lg$. Der Logarithmus zur Basis e heisst auch: $\log_e = \ln$.

Logarithmusgesetze

Logarithmen können nach bestimmten Regeln, den sogenannten Logarithmusgesetzen umgeformt werden. Es gibt drei Logarithmusgesetze:

- Multiplikationsgesetz: $\log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v)$
- Divisionsgesetz: $\log_a(\frac{u}{v}) = \log_a(u) - \log_a(v)$
- Potenzgesetz: $\log_a(u^v) = v \cdot \log_a(u)$

Da der Taschenrechner nur Tasten für den Logarithmus zur Basis 10 und zur Basis e. Die Basis muss also “gewechselt” werden können. Dies kann mit dem Basiswechselsatz gemacht werden:

$$\log_a(b) = \frac{\lg(b)}{\lg(a)}$$

3.2 Funktionen

Logarithmusfunktionen sind die Umkehrfunktionen der Exponentialfunktionen. So ist $g(x) = \log_{10}(x)$ die Umkehrfunktion zu $f(x) = 10^x$. Ihr Definitionsbereich ist definiert als $D = \{x | x > 0\}$, da $a^x = 0$ nicht definiert ist.
Die Logarithmusfunktion ist die korrespondierende Exponentialfunktion an der Gerade $y = x$ gespiegelt. Alle Logarithmusfunktionen gehen durch den Punkt $P(1/0)$, da jede Zahl hoch 0, 1 ergibt.

4 Exponentielles Wachstum mit Basis e

Die Exponentialfunktion $f(x) = a \cdot b^x$ kann auch mit Basis e in der Form $g(x) = a \cdot e^{cx}$ geschrieben werden. Die Umformung funktioniert wiefolgt:

$$\begin{aligned} b &= e^c \\ \ln(b) &= c \end{aligned}$$

Aber warum ist $f(x) = e^x$ so zentral? Antwort: weil ihre Ableitung gleich der Funktion ist: $f(x) = f'(x)$.

5 Ableitungen von Exponentialfunktionen

5.1 Ableitung von e^x

Für $f'(x)$ von $f(x) = e^x$ gilt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} = \\ &= e^x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} \end{aligned}$$

Da der Bruch bei kleinsten Zahlen immer näher an 1 kommt kann man vereinfacht sagen, dass $f'(x) = e^x \cdot 1 = e^x$.

5.2 Allgemein

Doch wie lautet die Ableitungsfunktion einer beliebigen exponentiellen Funktion $f(x) = b^x$? Die Antwort ist einfach zu finden wenn man die Funktion wie obig beschrieben mit der Basis e umschreibt: $f(x) = e^{\ln(b) \cdot x}$. Dann gilt die Kettenregel:

$$\begin{aligned} f'(x) &= f_i'(x) \cdot f_a'(x) \\ &= \ln(b) \cdot e^{\ln(b) \cdot x} = \\ &= \ln(b) \cdot b^x \end{aligned}$$

5.3 Tipps zur Kurvendiskussion

- Bei der Kurvendiskussion können Nullstellen, Extrempunkte und Wendepunkte nur mittels faktorisieren der Funktion gefunden werden (Jeder Faktor $= 0$).
- Der Definitionsbereich gehört zwingend zu der Kurvendiskussion dazu, da dieser nicht immer allen rationalen Zahlen entspricht.

6 Ableitung der Logarithmusfunktionen

6.1 Herleitung

Die Herleitung wird mittels einem kleinen Trick gemacht:

$$\begin{aligned} e^{\ln(x)} &= x \\ (\ln(x))' \cdot e^{\ln(x)} &= 1 \\ (\ln(x))' &= \frac{1}{e^{\ln(x)}} \\ (\ln(x))' &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

6.2 Tipps zur Kurvendiskussion

- Die Nullstellen sind immer da, wo das Argument des Logarithmus 1 ist, da $\ln(1) = 0$.
- Beim Definitionsbereich muss das Argument des Logarithmus immer $x > 0$ sein, da Logarithmen von negativen Zahlen nicht definiert sind.
- Bei den Extremwerten muss immer der Zähler von $f'(x)$ null sein.
- Bei den Wendepunkten muss auch immer der Zähler von $f''(x)$ null sein.

7 Das uneigentliche Integral

Ein uneigentliches Integral ist ein Integral von einer Funktion die eigentlich nicht integrierbar ist. Beispiel: Gesucht ist das Integral von $f(x) = \frac{1}{x^2}$ von $x = 1$ bis zur Unendlichkeit. Ein Lösungsansatz wäre anstatt der Unendlichkeit einen definierten Wert b zu nehmen den wir dann mittels Limes nach ∞ streben lassen:

$$A_b = \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \int_1^b x^{-2} dx = \left[\frac{-1}{x}\right]_1^b = \frac{-1}{b} + 1$$

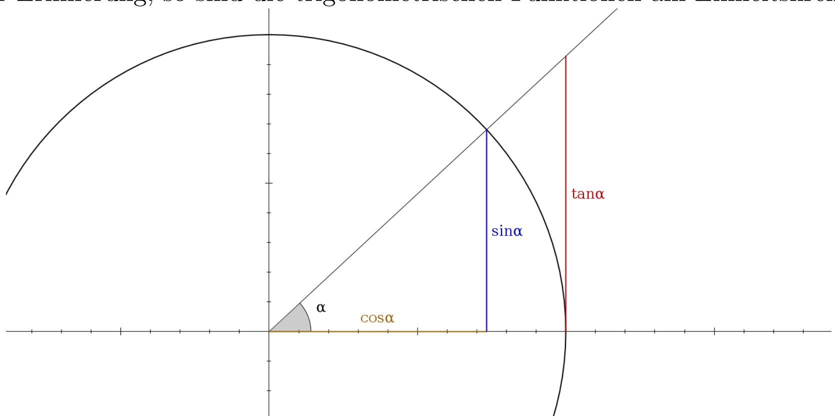
Also:

$$A_\infty = \lim_{b\to\infty} \left(\frac{-1}{b} + 1\right) = 1$$

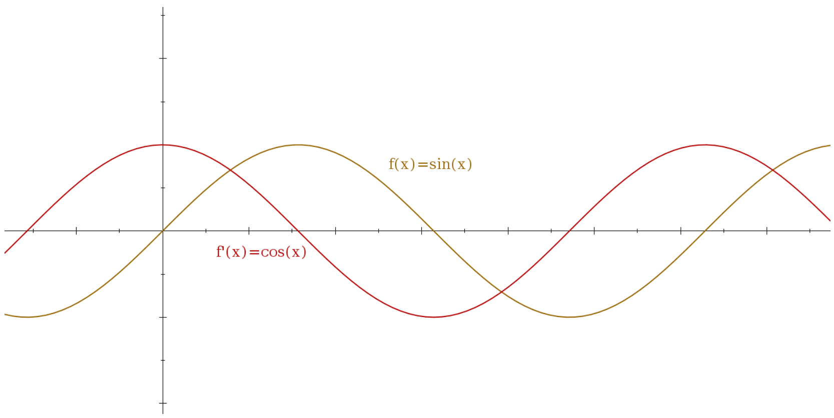
8 Trigonometrische Funktionen

8.1 Definition der trigonometrischen Funktionen

Zur Erinnerung, so sind die trigonometrischen Funktionen am Einheitskreis definiert:



8.2 Ableitungsfunktionen



Merke:

- Für $f(x) = \sin(x)$ ist die Ableitungsfunktion $f'(x) = \cos(x)$.
- Für $f(x) = \cos(x)$ ist die Ableitungsfunktion $f'(x) = -\sin(x)$.
- Für $f(x) = \tan(x)$ ist die Ableitungsfunktion $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

Herleitung der Tangensableitung

Da der Tangens definiert ist als $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ gilt:

$$\begin{aligned}
tan'(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{u^2(x)} \\
&= \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot (-\sin(x))}{\cos^2(x)} \\
&= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} \\
&= \frac{1}{\cos^2(x)}
\end{aligned}$$

8.3 Trigonometrische Gleichungen

Trigonometrische Gleichungen werden grundsätzlich mit ihren Umkehrfunktionen gelöst, sind komplexere Terme in der Funktion (Bsp.: $f(x) = \sin(2x^2 - 5x)$) muss der innere Term substituiert werden.

$$\begin{aligned}
\sin(x) &= 1 \\
\arcsin(1) &= 0
\end{aligned}$$

Dies ist allerdings erst die erste von zwei Lösungen in der ersten Periode, die zweite wird beim Sinus mit $x_2 = \pi - x_1$ gefunden und beim Cosinus mittels $x_2 = 2 \cdot \pi - x_1$.
Da die Funktion unendlich zwischen zwei Werten schwankt, gibt es auch unendlich viele Lösungen die sich jede Periode wiederholen man schreibt die Lösungen also komplett als $L_1 = x_1 + \frac{2\pi n}{b}$ und $L_2 = x_2 + \frac{2\pi n}{b}$.

8.4 Die allgemeine Sinusfunktion

Die mit der allgemeinen Sinusfunktion können verschiedene Schwingungen dargestellt werden. Ihre allgemeine Form lautet: $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d$. Doch was bedeuten die einzelnen Parameter:

- **a**: Streckung / Stauchung in y-Richtung. Ist $a > 1$ wird gestreckt, ist $a < 1$ wird gestaucht. Ist $a < 0$ wird die Funktion auch an der x-Achse gespiegelt.
- **b**: Streckung / Stauchung in x-Richtung $\rightarrow$ die Periode verkürzt sich, für die Periode einer Schwingung gilt: $x_p = \frac{2 \cdot \pi}{b}$.
- **c**: Verschiebung entlang der x-Achse. Ist $c > 0$ wird nach links verschoben, ist $c < 0$ wird nach rechts geschoben.
- **d**: Verschiebung entlang der y-Achse.

Achtung: Bei einem Term wie $f(x) = 3 \cdot \sin(2x - \pi)$ muss ausgeklammert werden ($f(x) = 3 \cdot \sin(2 \cdot (x - \frac{\pi}{2})))$ um die Verschiebung von $\frac{\pi}{2}$ zu bestimmen!