1 Trigonometriesche Funktionen

1.1 Vorbemerkungen

1. Definition Funktion: "Eine Funktion ordnet einem x-Wert einen eindeutigen y-Wert zu."

2. Es gibt drei Einheiten fuer Winkel:

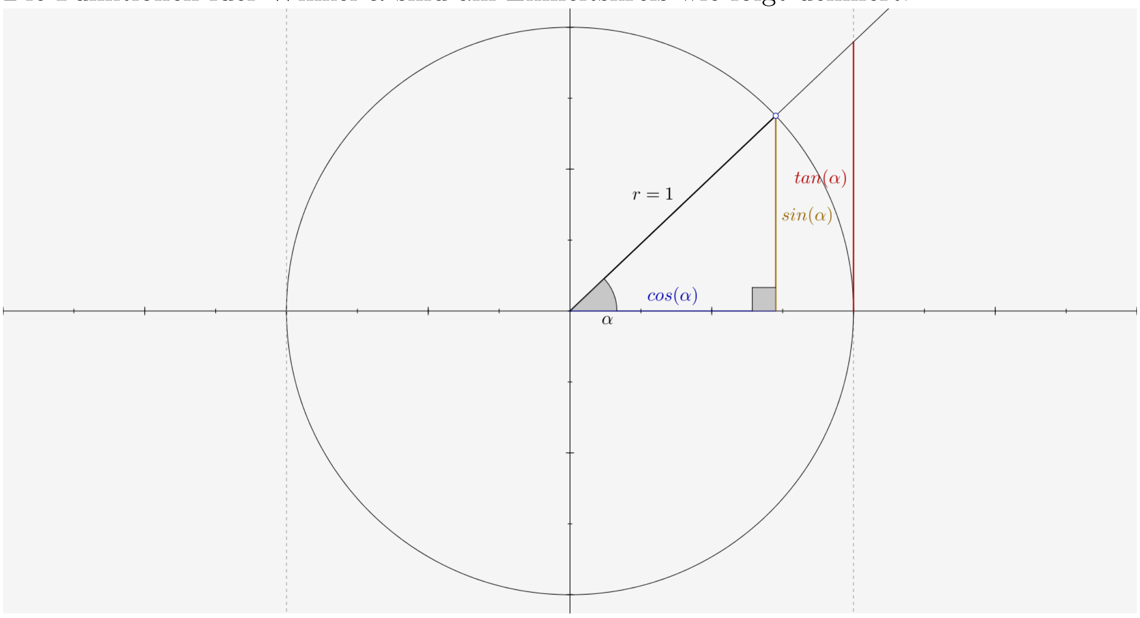
   (a) Gradmass: Der Einheitskreis wird in 360 Teile unterteilt bei dem je ein Teil einem Grad entspricht. Ein rechter Winkel entspricht also 90°.

   (b) Bogenmass: Die Winkelgroesse wird durch die Bogenlaenge am Einheitskreis definiert: Ganzer Kreis mit $r = 1$ ergibt $2 * r * \pi \Rightarrow 2 * 1 * \pi = 2 * \pi$.

   (c) Neugrad (Gon): Der Einheitskreis wird in 400 Teile unterteilt bei dem je ein Teil einem Gon entspricht. Ein rechter Winkel entspricht also 100^g.

1.2 Definition von Sinus, Cosinus und Tangens

Die Funktionen fuer Winkel α sind am Einheitskreis wie folgt definiert:



Ablesbare Werte fuer Sinus, Cosinus und Tangens:

α	0°	90°	180°	270°	360°
$\sin(\alpha)$	0	1	0	-1	0
$\cos(\alpha)$	1	0	-1	0	1
$\tan(\alpha)$	0	-	0	-	0

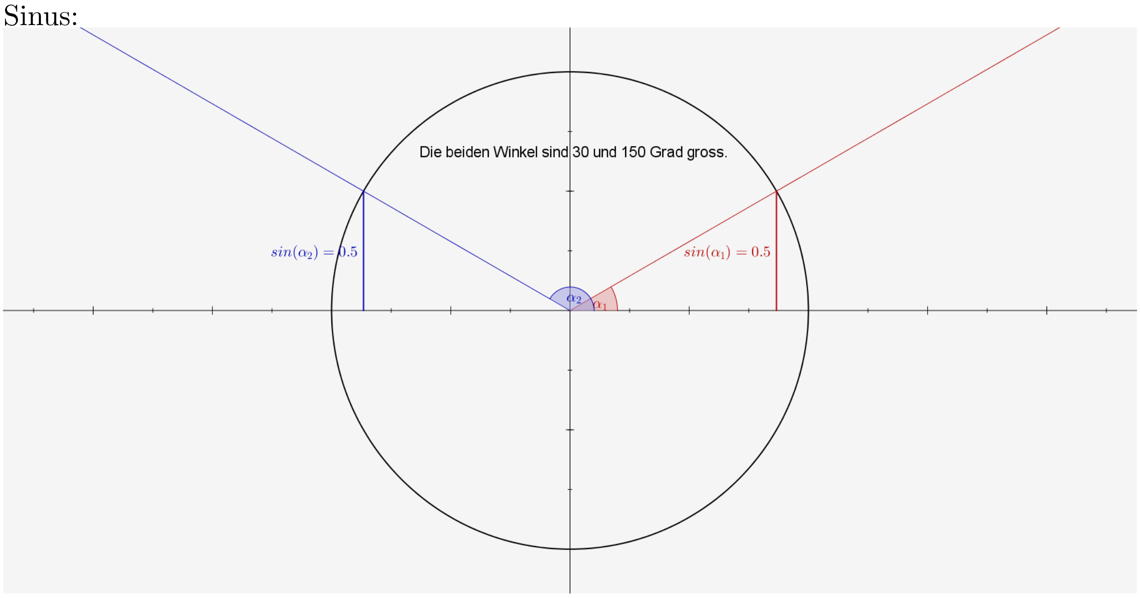
Aus der Definition der Winkelfunktionen folgt:

1. Trigonometrischer Pythagoras: Da die Hypothenuse $r = 1$ ist und die Katheten $\sin x$ bzw. $\cos x$ gilt: $\cos^2 x + \sin^2 x = 1^2$

2. Aehnliche Dreiecke haben nach Strahlensaetzen gleiche Seitenverhaeltnisse: Das aeussere Dreieck mit Tangens als Kathete ist aehnlich zum inneren Dreieck welches Cosinus und Sinus enthaelt, daraus lassen sich folgende Seitenverhaeltnisse ableiten:
   $\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\tan x}{1} \Rightarrow \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

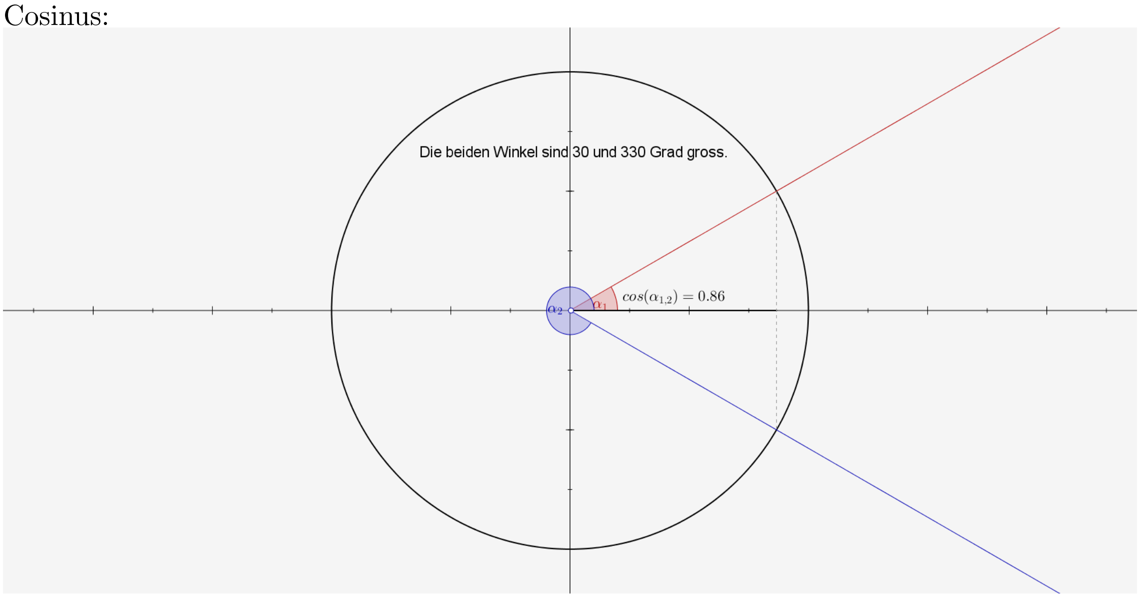
Es gibt beim Sinus und beim Kosinus immer zwei Winkel mit dem exakt gleichen Wert:

- Sinus:



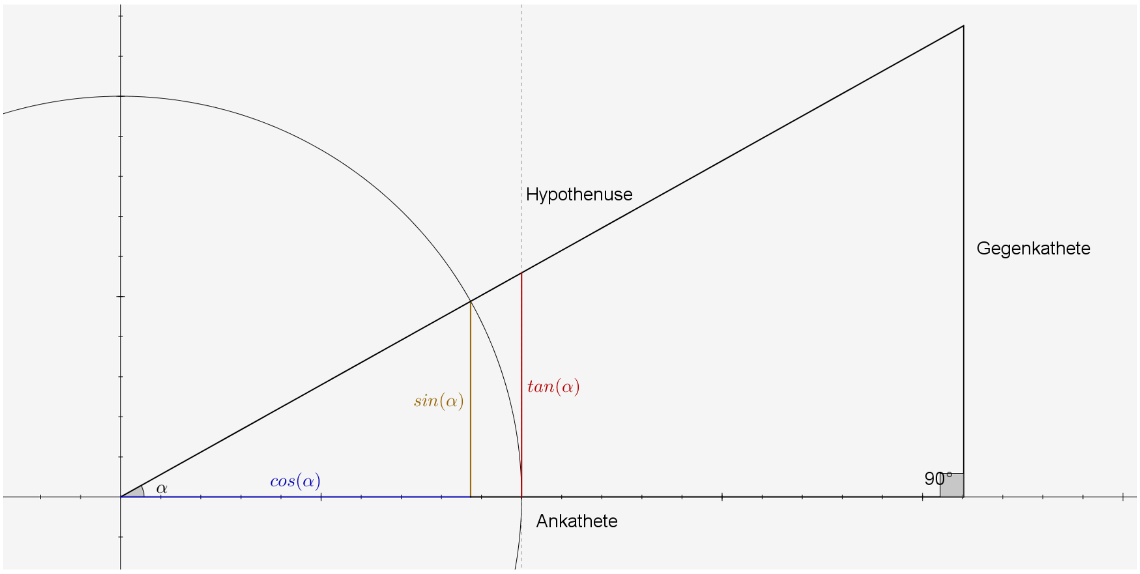
  Fuer 30° und 150° ist der Sinus-Wert offenbar gleich, es gilt: $\sin\alpha_1 = \sin\alpha_2$. Aus diesen beiden Winkeln laesst sich auch die Regel zur Bestimmung von α_2 herleiten: $\alpha_2 = 180° - \alpha_1$.

- Cosinus:



  Fuer 30° und 330° ist der Kosinus-Wert identisch, es gilt: $\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2$. Aus diesen beiden Winkeln laesst sich auch die Regel zur Bestimmung von α_2 herleiten: $\alpha_2 = 360° - \alpha_1$.

1.3 Winkelfunktionen an beliebigen rechtwinkligen Dreiecken



Durch die Strahlensaetze und aehnliche Dreiecke kann man mit dem grossen eingezeichneten Dreieck allgemeine Formeln herleiten:

- Sinus:

$$\frac{\sin(\alpha)}{1} = \frac{Gegenkathete}{Hypothenuse} \Rightarrow \sin(\alpha) = \frac{Gegenkathete}{Hypothenuse}$$

- Cosinus:

$$\frac{\cos(\alpha)}{1} = \frac{Ankathete}{Hypothenuse} \Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{Ankathete}{Hypothenuse}$$

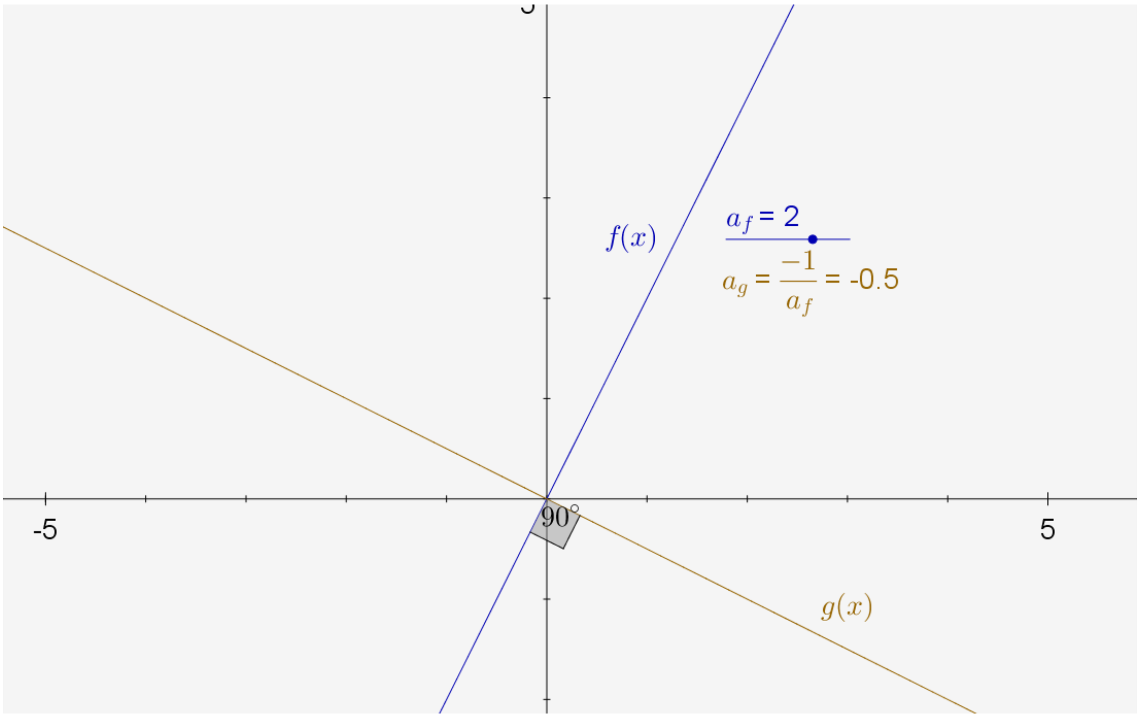
- Tangens:

$$\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \tan(\alpha) = \frac{Gegenkathete}{Ankathete}$$

Bemerkung: Die Hypothenuse ist die laengste Seite des rechtwinkligen Dreiecks und befindet sich gegenueber des rechten Winkels. Die Katheten sind abhaengig von gewaehlten Winkel: fuer den hier gewaehlten Winkel α ist die Katheten in der Graphik korrekt beschriftet. Die Gegenkathete ist die nicht beruehrende Seite, die Ankathete die den Winkel beruehrende Seite.

1.4 Schnittwinkel zwischen Graphen

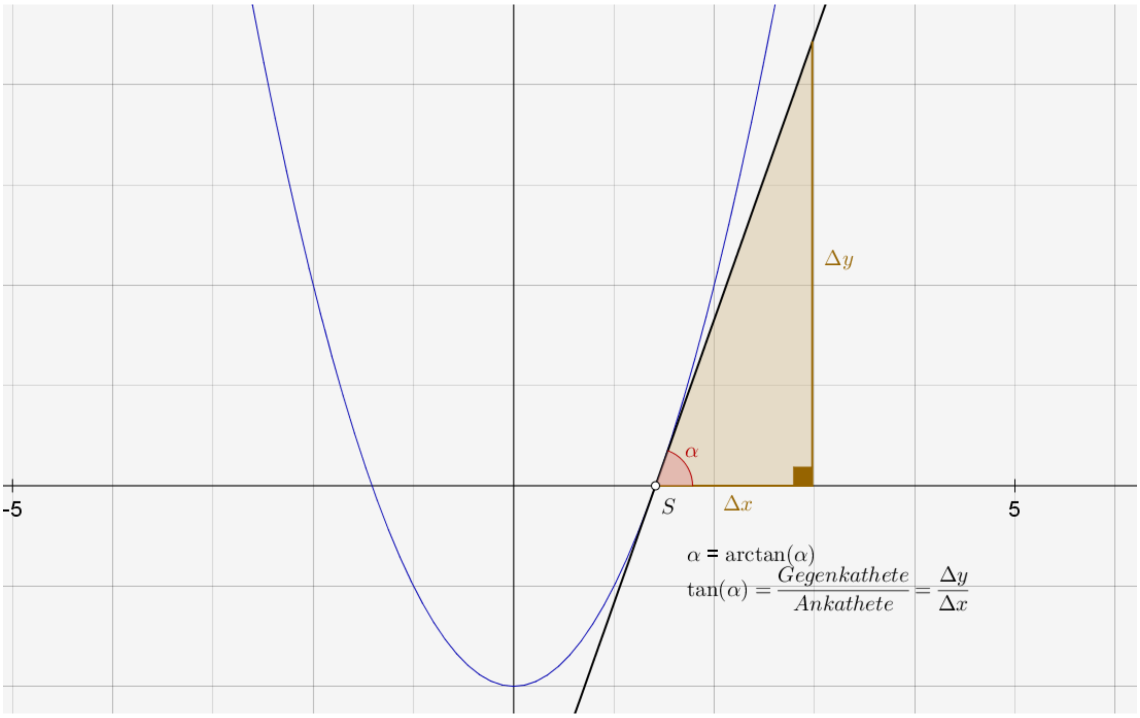
1.4.1 Vorbemerkung



Bei der Steigung von beliebiger Gerade $g(x) = a_g * x + b$ und Normale $n(x) = a_n * x + b$ gilt immer:

$$a_g * a_n = -1$$
$$a_n = \frac{-1}{a_g}$$

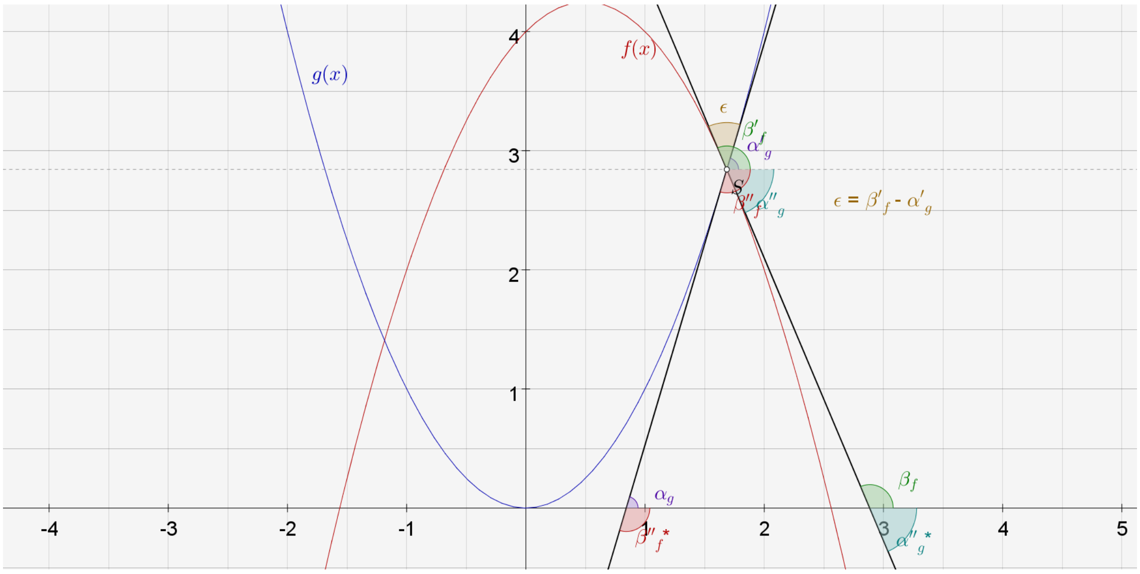
1.4.2 Schnittwinkel zwischen Kurve und X-Achse



Wie aus der obigen Graphik hervorgeht ist der $\tan(\alpha)$ als $\tan(\alpha) = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ definiert. Wie wir wissen ist dies ebenfalls die Definition der Steigung einer Gerade (In diesem Fall der Tangente am Schnittpunkt mit der x-Achse). Zu merken:

- Der Winkel zwischen einer Funktion und der x-Achse ist der spitze Winkel zwischen der Tangente am Schnittpunkt und der x-Achse
- Die Steigung ist der $a = \tan(\alpha)$, und somit ist $\alpha = \arctan(a)$

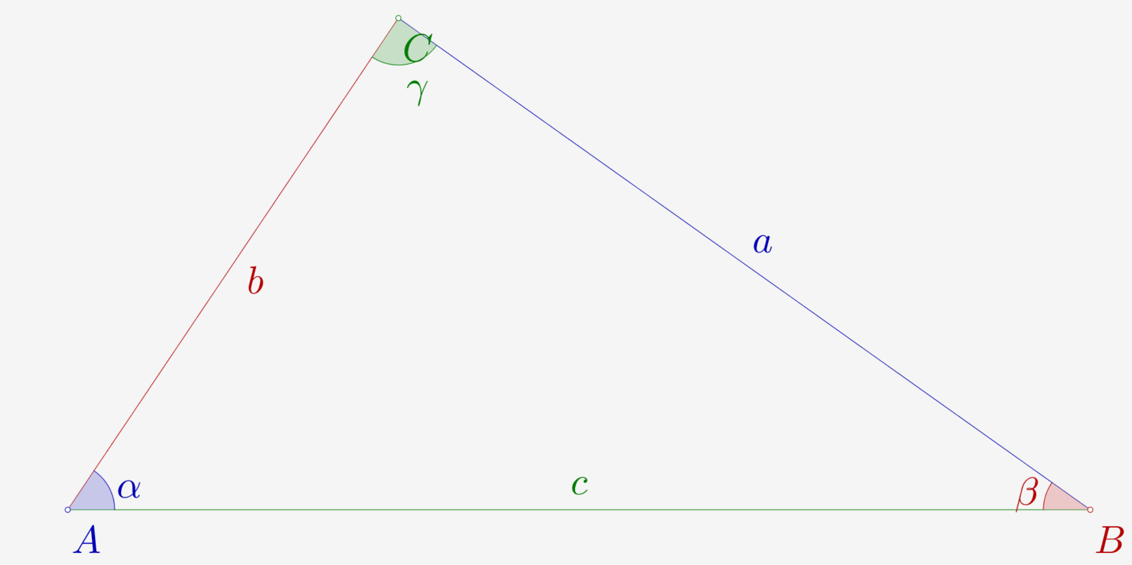
1.4.3 Schnittwinkel zwischen Graphen



Gesucht ist bei der Beispielgraphik der spitze Schnittwinkel ϵ. Bei der Schnittwinkelbestimmung zweier Graphen geht man analog vor:

1. Schnittpunkt durch gleichsetzen bestimmen.
2. Tangentensteigungen am Schnittpunkt bestimmen.
3. Eine Parallele durch den Schnittpunkt zur x-Achse ziehen: nun gilt wieder $\alpha = \arctan(a)$, aber diesmal zur verschobenen Parallele.
4. Bestimmen der Winkel analog zu Kapitel 1.4.2.
5. Eventuell hat man nun negative Winkel erhalten. Diese sind die rot/tuerkis eingezeichneten Winkel in der Graphik. Aus Ueberlegungen geht hervor:
   (a) Sind beide Winkel positiv gilt "Grosser Winkel - Kleiner Winkel":
   $$\epsilon = \beta'_f - \alpha'_g$$
   (b) Sind beide Winkel negativ gilt "Betrag Grosser Winkel - Betrag Kleiner Winkel":
   $$\epsilon = |\beta''_f| - |\alpha''_g|$$
   (c) Ist ein Winkel positiv und der andere negativ gilt "180 - (Betrag Negativer Winkel + Positiver Winkel)":
   $$\epsilon = 180° - (|\beta''_f| + \alpha'_g)$$
   $$\epsilon = 180° - (\beta'_f + |\alpha''_g|)$$

2 Das allgemeine Dreieck



Einige Bemerkungen zum allgemeinen Dreieck:

- Man beschriftet die Punkte von unten links beginnend im Gegenuhrzeigersinn mit A, B und C.
- Die gleichnamige Seite liegt dem Punkt gegenueber.
- Der Winkel α gehoert zu Punkt A, der Winkel β gehoert zu Punkt B und γ gehoert zu Punkt C.
- Wenn nichts anderes in der Aufgabe gegeben ist, wird ein rechter Winkel als Winkel $\gamma = 90°$ angenommen.

3 Vektorgeometrie

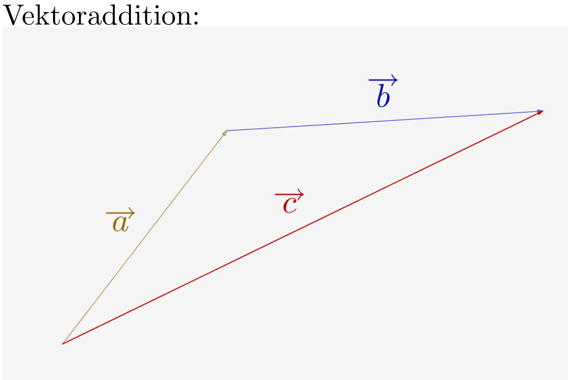
3.1 Der Rundlauf

⇒ Theorie (Rezept) im Vektorgeometrie Theoriebuch ab Seite 15.

3.2 Rechnen mit Vektoren

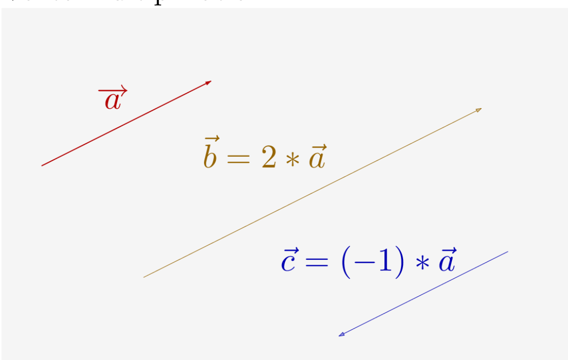
Mit Vektoren kann gerechnet werden sie koennen multipliziert und addiert werden:

- Vektoraddition:



$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$
$$\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_a + x_b \\ y_a + y_b \end{pmatrix}$$

- Vektormultiplikation:



  - Verlaengerung / Verkuerzung durch Multiplikation:

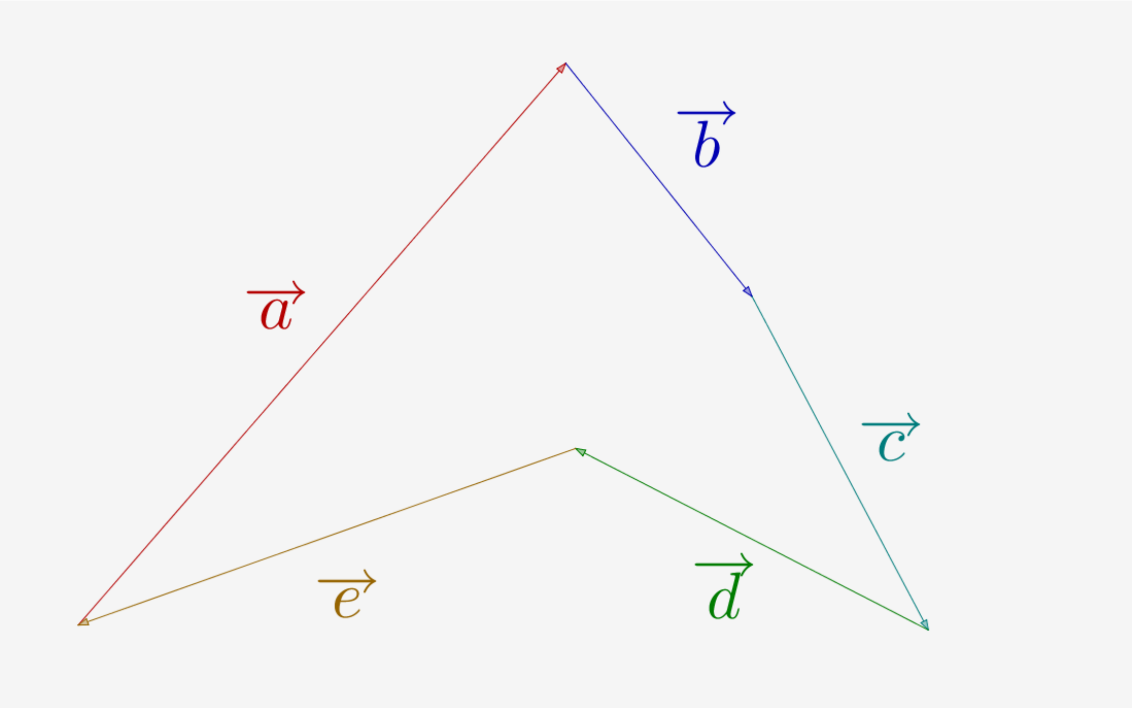
$$\vec{b} = 2 * \vec{a}$$
$$\begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} = 2 * \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 * x_a \\ 2 * y_a \end{pmatrix}$$

  - Richtungsverdrehung durch Multiplikation mit negativen Zahlen:

$$\vec{c} = (-1) * \vec{a}$$
$$\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} = (-1) * \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1) * x_a \\ (-1) * y_a \end{pmatrix}$$

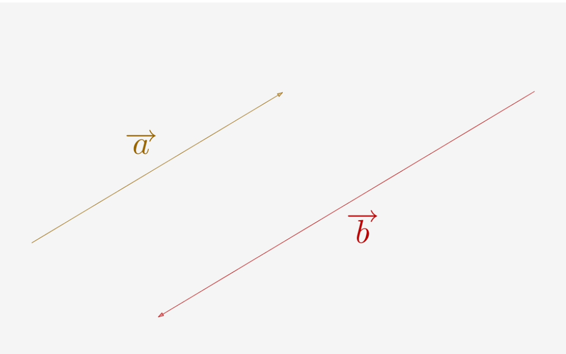
3.3 Grundbegriffe der Vektorrechnung

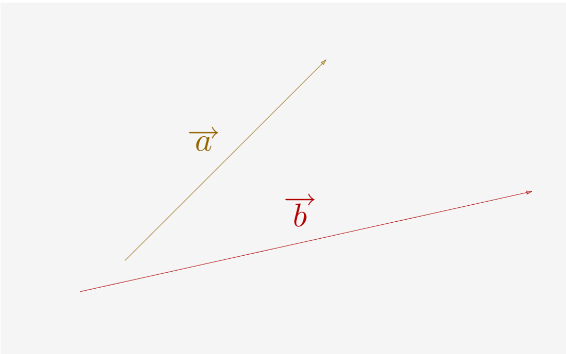
3.3.1 Nullsumme



Ergeben alle Vektoren in einer Addition 0, so ergeben sie eine Nullsumme. Dies bedeutet anschaulich, dass der Anfangspunkt auch der Endpunkt ist (siehe Graphik).

3.3.2 Kollineare Vektoren

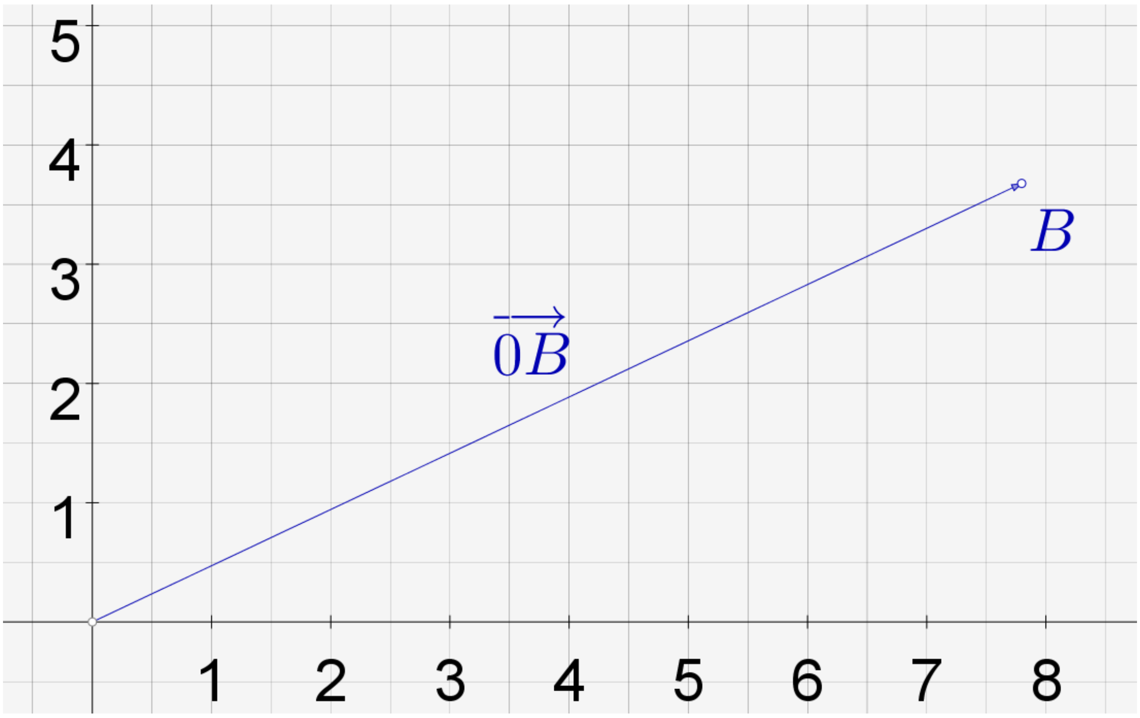




Kann ein Vektor durch Multiplikation des Anderen mit einem Skalar berechnet werden, so sind die Vektoren kollinear, oder auch linear abhaengig. Da dies nur bei Richtungsdrehung oder Laengenveraenderung der Fall sein kann muessen die Vektoren parallel sein um kollinear zu sein. Im ersten Bild sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ kollinear.

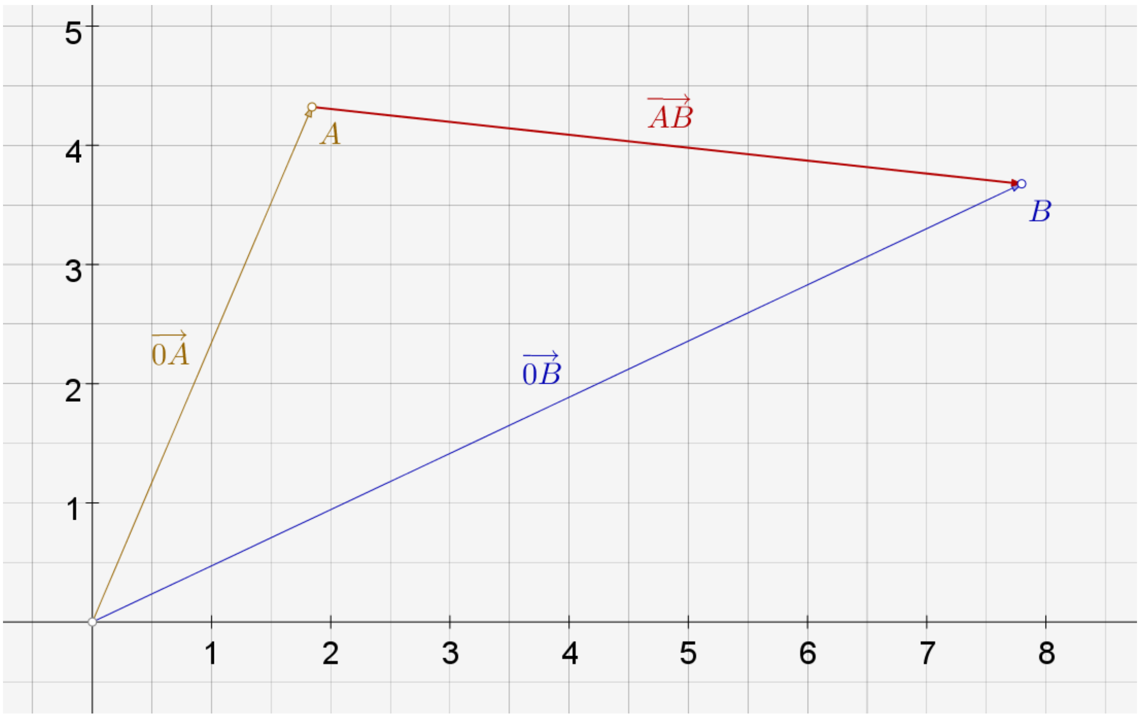
Sind also Vektoren nicht parallel, kann der Eine nicht mittels Skalarmuliplikation aus dem Anderen berechnet werden, die Vektoren sind linear unabhaengig. Im zweiten Bild sind Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear unabhaengig.

3.3.3 Ortsvektor



Der Ortsvektor ist definiert als der Vektor vom Ursprung zum Punkt den er repraesentiert. Er wird geschrieben als $0\vec{B} = \binom{2}{3}$ wenn der Punkt B die Koordinaten $B(2/3)$ hat.

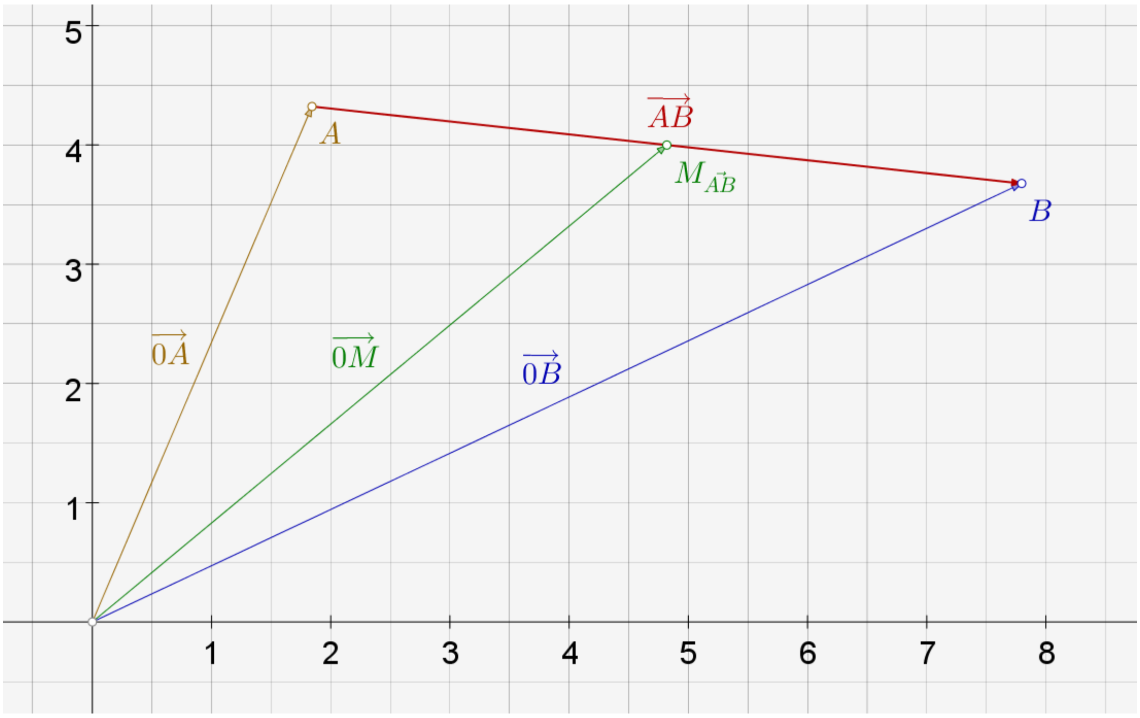
3.4 Vektoren zwischen Punkten



Der Vektor $A\vec{B}$ kann durch Vektoraddition mit den Ortsvektoren zu Punken A und B ausgedrueckt werden, es gilt:

$$A\vec{B} = 0\vec{B} - 0\vec{A}$$

3.5 Mittelpunkt zwischen Punkten



Der Ortsvektor des Mittelpunkts kann mittels Vektoraddition aus den gegebenen Ortsvektoren von A und B ausgedrueckt werden, es gilt:

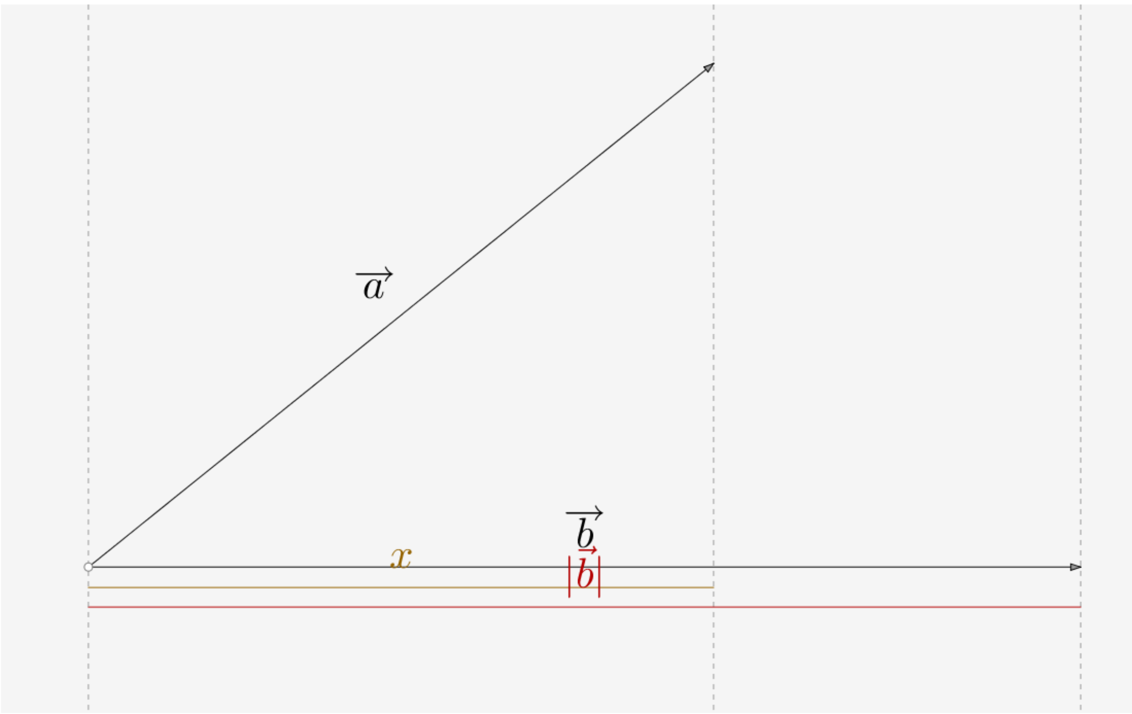
$$0\vec{M} = 0\vec{B} + B\vec{M}$$
$$0\vec{M} = 0\vec{B} + \frac{1}{2} * B\vec{A}$$
$$0\vec{M} = 0\vec{B} + \frac{1}{2} * (0\vec{A} - 0\vec{B})$$
$$0\vec{M} = \frac{1}{2} * (0\vec{A} + 0\vec{B})$$

3.6 Betrag eines Vektors

Der Betrag eines Vektors ist gleichbedeutend mit der Laenge des Vektors und wird mittels dem rechtwinkligen Dreieck unter Verwendung des Satz des Pythagoras berechnet:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} \rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2}$$

3.7 Skalarprodukt



Das Skalarprodukt von zwei Vektoren $\vec{a} = \binom{x_a}{y_a}$ und $\vec{b} = \binom{x_b}{y_b}$ ist definiert als:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = x_a * x_b + y_a * y_b$$

Was ist nun die Bedeutung des Produkts?

$$x_a * x_b + y_a * y_b = |\vec{b}| * x$$

Da $x = |\vec{a}| * \cos(\alpha)$:

$$x_a * x_b + y_a * y_b = |\vec{b}| * |\vec{a}| * \cos(\alpha)$$

Hauptanwendung des Skalarprodukts ist die Bestimmung eines Zwischenwinkels von zwei Vektoren.

3.8 Senkrechte Vektoren

1. Bei senkrechten Vektoren gilt: $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$

2. Um einen senkrechten Vektor zu einem beliebigen Vektor $\vec{a} = \binom{x_a}{y_a}$ zu bestimmen koennen einfach die Komponenten verdreht und eine Komponente mit (-1) multipliziert werden. Es folgt:

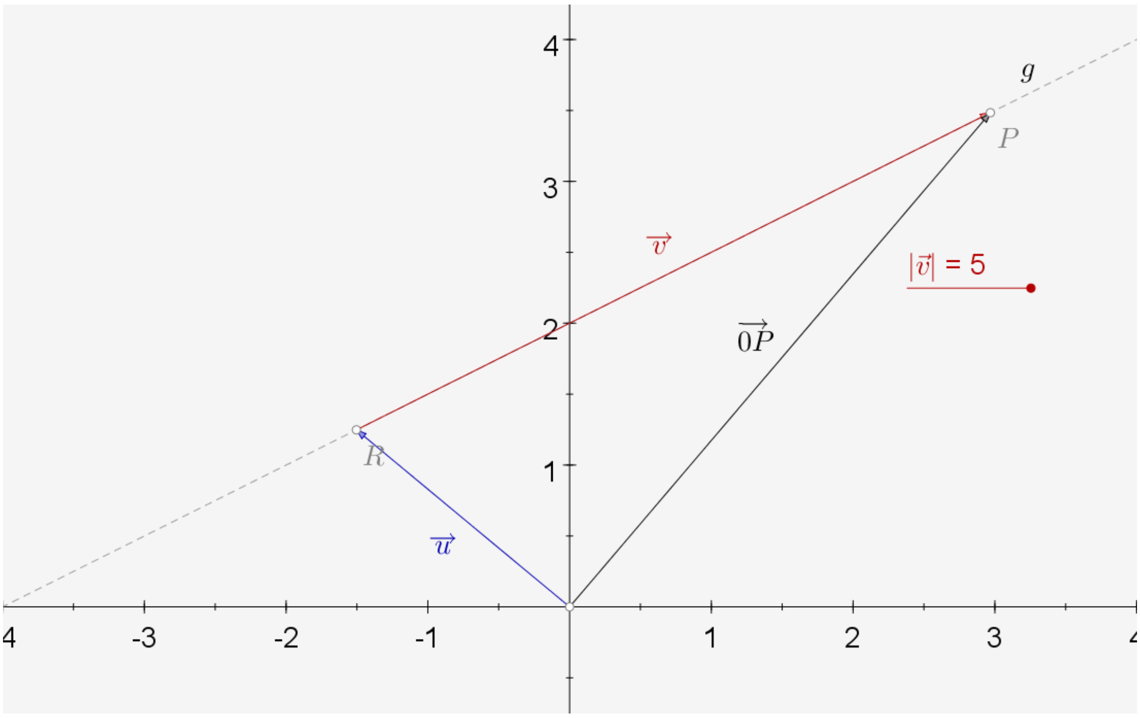
$$\vec{b} = \begin{pmatrix} -y_a \\ x_a \end{pmatrix} \perp \vec{a}$$

3.9 Vektoren auf bestimmte Laenge bringen

Soll ein bestehender Vektor $\vec{a} = \binom{x_a}{y_a}$ auf eine neue bestimmte Laenge l gebracht werden, so muss der Vektor zuerst durch Teilen mit $|\vec{a}|$ auf Laenge eins gebracht und danach mit der neuen gewuenschten Laenge multipliziert werden. Daraus folgt fuer den veraenderten Vektor $\vec{b}$:

$$\vec{b} = \frac{l}{|\vec{a}|} * \vec{a}$$

3.10 Gerade in der Ebene



Bisher wurde eine Gerade als $y = a * x + b$ dargestellt, wobei $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Neu kann eine beliebige Gerade g mittels zweier Vektoren dargestellt werden: Einem Ortsvektor zu einem Punkt auf der Gerade und einem Vektor der die Richtung der Gerade angibt:

$$0\vec{P} = \vec{u} + t * \vec{v}$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$$

Eigentlich ist dies ein Gleichungssystem aus zwei Gleichungen, da der Vektor in der Ebene zwei Komponenten hat:

$$x = u_1 + t * v_1$$
$$y = u_2 + t * v_2$$

3.10.1 Bestimmung ob Punkt auf Gerade liegt

Ein Punkt liegt auf der Gerade, wenn beide Gelichungen des obigen Gleichungssystems mit eingesetztem Punkt P den gleichen Faktor t ergeben. Ist $t_{Gl1} = t_{Gl2}$, ist Punkt $P \in g$.

3.10.2 Spurpunkte bestimmen

Die Spurpunkte mit x- und y-Achse koennen durch einfaches Nullsetzen der jeweiligen Variablen bestimmt werden. Fuer den y-Spurpunkt muss $x = 0$gesetzt werden:

$$0 = u_1 + t * v_1$$
$$y = u_2 + t * v_2$$

Fuer den x-Spurpunkt muss $y = 0$ gesetzt werden:

$$x = u_1 + t * v_1$$
$$0 = u_2 + t * v_2$$

3.10.3 Gerade aus zwei gegebenen Punkten

Sind zwei Punkte A und B gegeben kann die Gerade mit einem Start- und einem Richtungsvektor bestimmt werden. Der Startvektor ist der Ortsvektor eines der Punkte (z.B. $0\vec{A}$, der Richtungsvektor der Verbindungsvektor $\vec{AB} = 0\vec{B} - 0\vec{A}$.

3.10.4 Schnittpunkt zweier Geraden finden

Die Geraden muessen wie gehabt gleichgesetzt werden. Danach kann das Gleichungssystem nach den beiden Streckungsfaktoren t und s aufgeloest werden. Der Streckungsfaktor kann nun in die entsprechende Gleichung (Achtung: Nicht in beide, da beide Gleichungen andere Streckungsfaktoren zum gleichen Punkt aufweisen!) eingesetzt werden um den Ortsvektor $0\vec{P}$ zum entsprechenden Punkt zu finden.

$$\begin{pmatrix} x_{u1} \\ y_{u1} \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} x_{v1} \\ y_{v1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{u2} \\ y_{u2} \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} x_{v2} \\ y_{v2} \end{pmatrix}$$

3.10.5 Schnittwinkel zwischen Geraden

Der Schnittwinkel zwischen den Geraden entspricht dem Schnittwinkel der Richtungsvektoren $\Rightarrow$ Skalarprodukt.

3.10.6 Darstellungsformen einer Gerade

Geraden haben verschiedene Formen in denen sie ausgedrueckt werden koennen:

- Parameterform:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$$

- explizite Form:

$$y = a * x + b$$

- Normalform:

$$a * x + b * y = c$$

Wichtig: Die Faktoren a und b ergeben eingesetzt in einen Vektor eine Normale zur Gerade: $\vec{n} = \binom{a}{b} \perp g$.
Anwendung: Abstand Punkt-Gerade (Gegeben: Punkt und Gerade), Rezept:

1. Lotgerade bilden.
2. Schneiden von Lotgerade mit Gerade g.
3. Abstand $d = |\vec{AS}|$

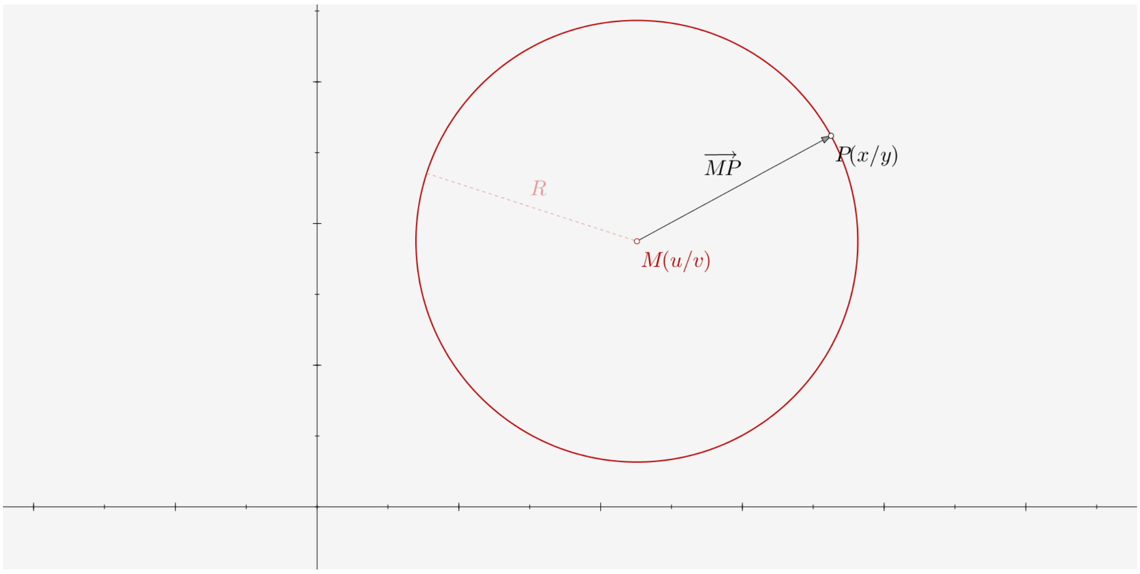
3.10.7 Anwendungen und Vertiefungen

1. Flaeche Dreieck: $\frac{c*h_c}{2}$, da $h_c = b * \sin(\alpha)$ Flaeche A $= 0.5 * b * c * \sin(\alpha)$.
2. Die Hoehe eines Dreiecks kann mittels dem Rezept Abstand Punkt-Gerade bestimmt werden.
3. Ein Punkt kann gespiegelt werden indem der Streckungsfaktor zu Schnittpunkt S (Rezept) verdoppelt wird.

3.11 Hesse Normal Form

⇒ Herleitung und Formel im Buch "Vektoren in 2 Dimensionen" S. 46.

3.12 Kreisgleichungen



Fuer die Punkte auf der Kreisline gilt: $|\vec{M}P| = R$ oder $|\vec{M}P|^2 = R^2$. Dies ist ausgeschrieben:

$$\vec{M}P = 0\vec{P} - 0\vec{M} = \begin{pmatrix} x-u \\ y-v \end{pmatrix}$$
$$|\vec{M}P| = \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2}$$
$$|\vec{M}P|^2 = (x-u)^2 + (y-v)^2$$
$$R^2 = (x-u)^2 + (y-v)^2$$

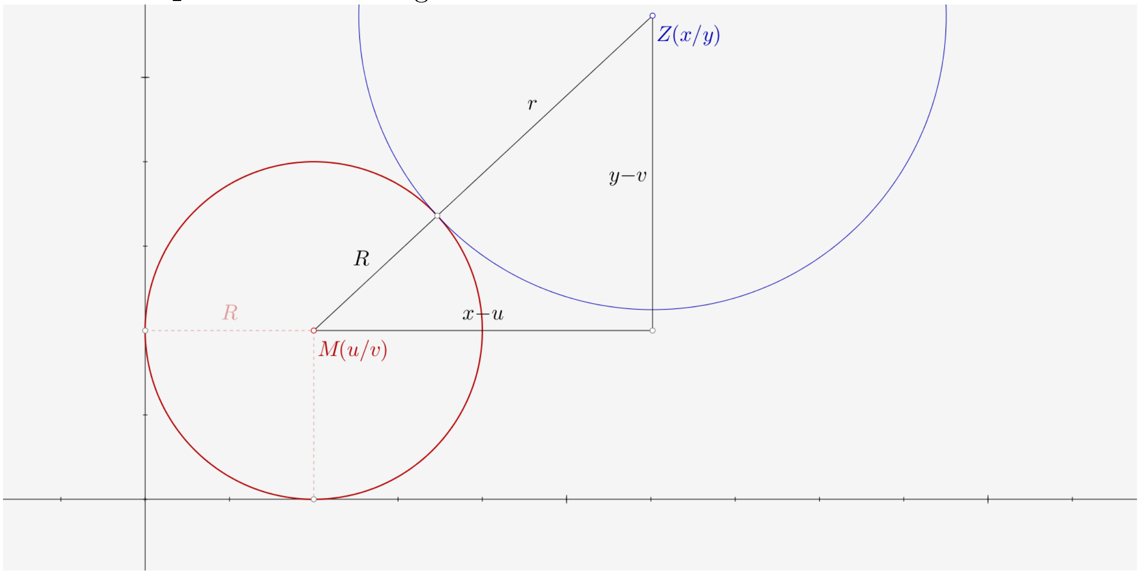
3.12.1 Suchaufgaben

1. Gegeben ist die ungeordnete Kreisgleichung, gesucht sind Radius und Mittelpunkt. Loesung: Quadratisches Ergaenzen der Gleichung und nachfolgendes Ablesen.

2. Gegeben sind drei Punkte A, B und C auf der Kreislinie, gesucht ist die Kreisgleichung. Loesung: Einsetzen der Punkte in die Kreisgleichung, loesen des Gleichungssystems:

$$R^2 = (x_A - u)^2 + (y_A - v)^2$$
$$R^2 = (x_B - u)^2 + (y_B - v)^2$$
$$R^2 = (x_C - u)^2 + (y_C - v)^2$$

3. Gegeben Kreisgleichungvon Kreis k_2, gesucht Kreisgleichung k_1 des Kreises der x- und y-Achse, sowie Kreis k_2 beruehrt. Loesung:



Da der Kreis die Koordinatenachsen beruehrt muessen seine beiden Koordinatenwerte $u = R$ und $v = R$ sein. Aus dem Dreieck aus der Graphik ergibt sich mittels Pythagoras die dritte Gleichung: $(R + r)^2 = (6 - u)^2 + (5 - v)^2$.

3.12.2 Schnittprobleme

1. Gerade mit Kreis schneiden: Gleichungssystem aus Geraden- und Kreisgleichung (Achtung: Gleichsetzen funktioniert nicht, da eine Kreisgleichung keine Funktion ist!):

$$
\begin{aligned}
y &= a * x + b \\
(x - u)^2 + (y - v)^2 &= R^2
\end{aligned}
$$

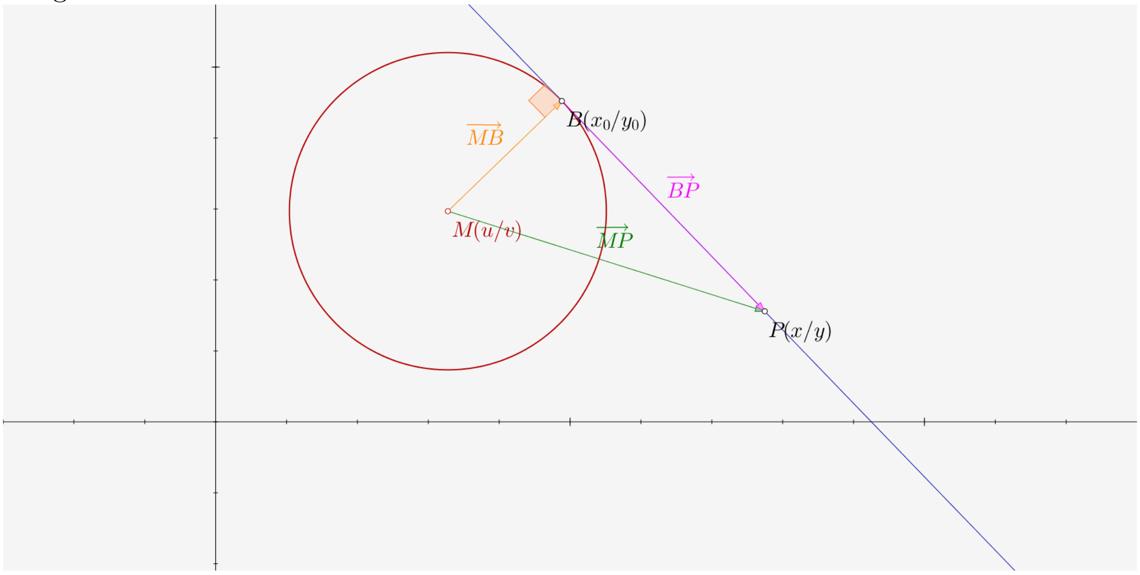
2. Kreise schneiden: Die Kreisgleichungen der Kreise ausmultiplizieren, alle x- und y-Terme auf eine und die Zahl auf die andere Seite bringen und mittels Subtraktionsverfahren eine von der anderen Kreisgleichung abziehen $\Rightarrow$ ergibt Gerade $y = a * x + b$. Diese Gerade kann nun analog zu Fall eins wieder in ein Gleichungssystem mit einer der Kreisgleichungen gebracht werden:

$$
\begin{gathered}
(x - u_1)^2 + (y - v_1)^2 = R_1^2 \\
(x - u_2)^2 + (y - v_2)^2 = R_2^2 \\
\Rightarrow y = a * x + b
\end{gathered}
$$

$$
\begin{aligned}
y &= a * x + b \\
(x - u_{1,2})^2 + (y - v_{1,2})^2 &= R_{1,2}^2
\end{aligned}
$$

3.12.3 Tangentenprobleme (Polarisieren)

1. Tangente an Punkt auf Kreislinie:



Vorbemerkungen:

(a) $\vec{BP} \perp \vec{MB} \Rightarrow \vec{BP} \circ \vec{MB} = 0$

(b) $-\vec{MB} + \vec{MP} = \vec{BP}$

(c) $\vec{a} \circ \vec{a} = a_1^2 + a_2^2 = |\vec{a}|^2$

Rechnung:

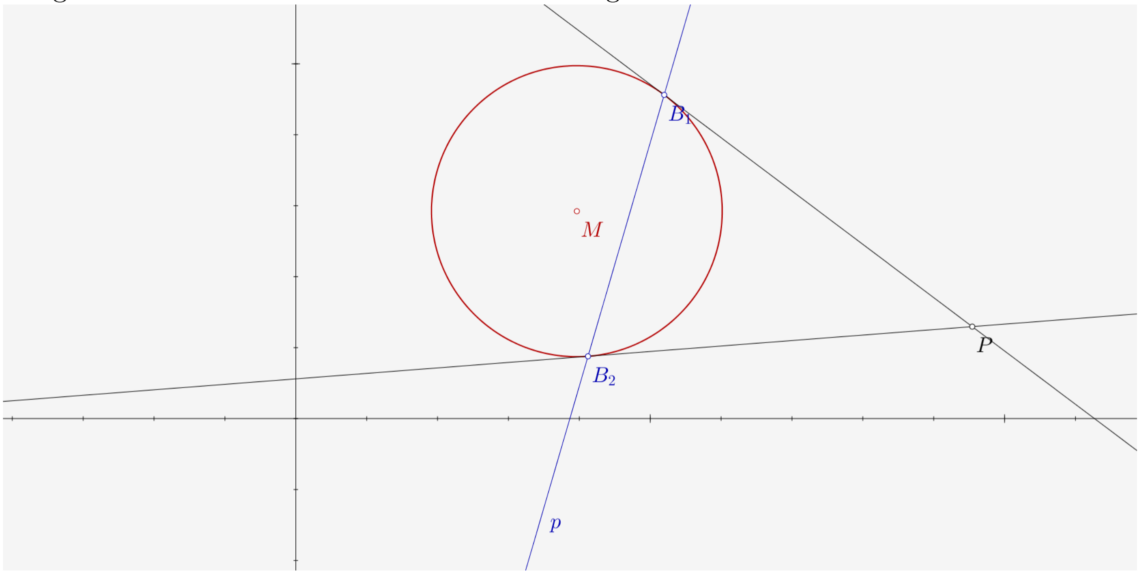
$$
\begin{aligned}
\vec{BP} &= \vec{MP} - \vec{MB} \\
\vec{BP} \circ \vec{MB} &= \vec{MB} \circ (\vec{MP} - \vec{MB}) \\
0 &= \vec{BP} \circ \vec{MP} - \vec{MB}^2 \\
0 &= \vec{BP} \circ \vec{MP} - R^2 \\
\vec{MB} \circ \vec{MP} &= R^2
\end{aligned}
$$

Mit Koordinaten $\vec{MB} = \binom{x_0-u}{y_0-v}$ und $\vec{MP} = \binom{x-u}{y-v}$:

$$
\begin{pmatrix} x_0 - u \\ y_0 - v \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x - u \\ y - v \end{pmatrix} = R^2
$$

$$
(x_0 - u) * (x - u) + (y_0 - v) * (y - v) = R^2 \Rightarrow Tangentengleichung!
$$

2. Tangenten von kreisfremdem Punkt an Kreis legen:



Bei diesem Fall kann anfangs gleich verfahren werden: Man polarisiert die Kreisgleichung mit P, erhaelt aber diesmal die Polare p, diese ist die Verbindungsgerade der Beruehrpunkte. Diese kann man nun wie bereits bekannt mit dem Kreis schneiden um die Punkte zu erhalten. Um nun die Tangentengleichungen zu erhalten, polarisiert man den Kreis erneut, diesmal mit den Punkten B_1 und B_2.

4 Wahrscheinlichkeit

4.1 Einleitung

Beispiel: Es wird mit einem fairen Wuerfel gewuerfelt. Die Ereignisse die eintreten koennen sind im Ergebnisraum Ω zusammengefasst:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Moegliche Ereignisse waeren:

- Eine 6 wuerfeln: $E_1 = \{6\}$
- Eine gerade Zahl wuerfeln: $E_2 = \{2, 4, 6\}$
- Eine Primzahl wuerfeln: $E_3 = \{2, 3, 5\}$

Die Wahrscheinlichkeit p kann mit dem Laplace-Rezept ermittelt werden:

$$p(E_x) = \frac{|E_x|}{|\Omega|}$$

4.2 Kombinatorik

4.2.1 Faktorielle

Als Faktorielle wird definiert:

$$n! = 1 * 2 * 3 * ... * (n-2) * (n-1) * n$$

Fuer den Spezialfall von 0 wird definiert das $0! = 1$ ist. Aus obiger Definition kann zur Vereinfachung von Termen entnommen werden dass $n! = n * (n-1)!$ ist.

4.2.2 Permutationen

Permutationen sind Vertauschungen von Elementen. Abhngig davon ob die Elemente alle unterschiedlich sind (also keine Wiederholungen beinhalten), spricht man von Permutationen mit oder ohne Wiederholungen:

- Ohne Wiederholung: Es werden n Elemente die voneinander unterscheidbar sind betrachtet. Ohne Wiederholung kann jedes Element nur einmal ausgewaehlt werden, d.h. bei der Auswahl des ersten Elements bestehen n Moeglichkeiten, bei der zweiten Wahl noch $(n-1)$ und so weiter, bis irgendwann nur noch ein Element gewaehlt werden kann. Dies entspricht genau der Definition der Fakultaet. Es gibt also immer $n!$ Permutationen ohne Wiederholung.
- Mit Wiederholung: Es werden n Elemente betrachtet von denen jeweils Gruppen $k_1, k_2, ...k_m$ nicht unterscheidbar sind. Hier sind wieder insgesamt $n!$ Permutationen grundsaetzlich moeglich, da aber die Mitglieder der Gruppen k_1 bis k_m nicht unterschieden werden fallen jeweils $k_1!$ bis $k_m!$ Permutationen weg, da sie nur Vertauschungen innerhalb der Gruppenmitglieder darstellen wuerden. Bei $k_1 + k_2 + ...k_m = n$: ${}^{k_1,k_2,...k_m}P_n = \frac{n!}{k_1! * k_2! * ... * k_m!}$

4.2.3 Variationen

Variationen sind Stichproben (also eine kleinere Auswahl aus einer groesseren Auswahl an Elementen) die die Reihenfolge der Elemente beruecksichtigen, so sind $(a-b-c)$ und $(b-c-a)$ verschiedene Variationen. Abhaengig davon ob ein Element mehrmals hintereinander gewaehlt werden kann (sprich: ob das Element in "zurueckgelegt" wird), spricht man von Variationen mit oder ohne Wiederholungen:

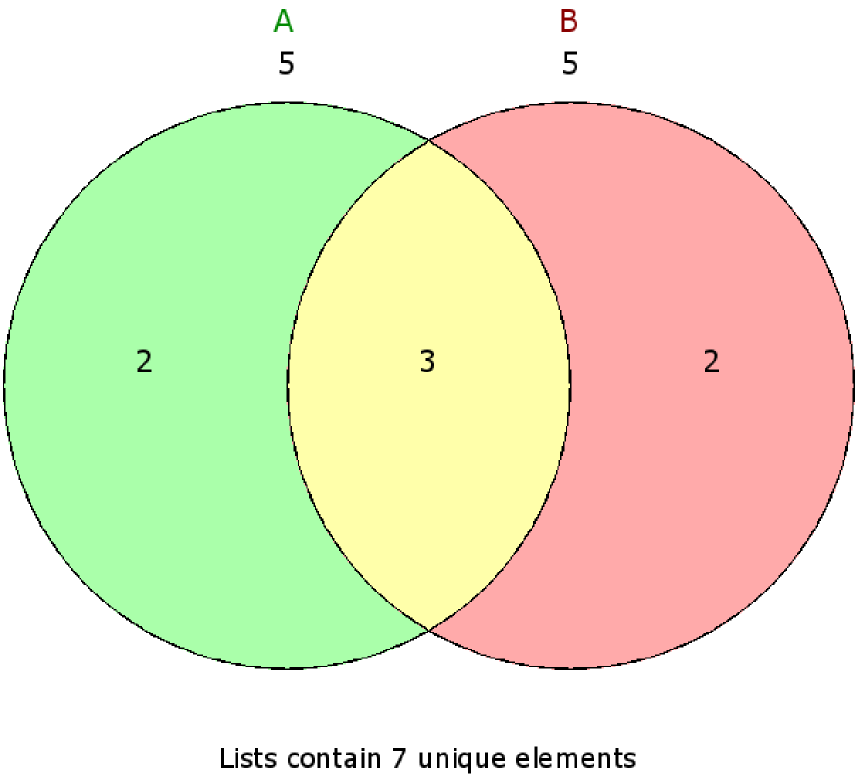
- Ohne Wiederholung: Es werden n Elemente betrachtet von denen Variationen von k Elementen gemacht werden sollen, jedes Element kann nur einmal vorkommen. Bei der ersten Auswahl bestehen n Moeglichkeiten, bei der zweiten $(n-1)$ und bei der letzten Auswahl sind noch $(n-k+1)$ Moeglichkeiten offen, daher ist die Anzahl Moeglichkeiten gleich $n*(n-1)*(n-2)*...*(n-k+1)$. Das ist grundsaetzlich $n!$ allerdings fehlen die Faktoren von 1 bis $(n-k)$ was $(n-k)!$ entspricht. Daher muss $n!$ auch durch $(n-k)!$ geteilt werden: $V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.
- Mit Wiederholung: Es werden n Elemente betrachtet von denen Variationen von k Elementen gemacht werden sollen. Bei der ersten Auswahl gibt es n Moeglichkeiten, da Wiederholungen moeglich sind gibt es auch bei den folgenden Auswahlen jeweils n Moeglichkeiten. Daraus folgt: ${}^wV_n^k = n^k$.

4.2.4 Kombinationen

Kombinationen sind Stichproben, bei denen die Reihenfolge keine Rolle spielt, $(a-b-c)$ ist also identisch mit $(b-c-a)$. Abhaengig davon ob die Elemente nach der Auswahl wieder "zurueckgelegt" werden, spricht man von Kombinationen mit oder ohne Wiederholungen:

- Ohne Wiederholung: Es werden n Elemente betrachtet von denen Variationen von k Elementen gemacht werden sollen, jedes Element kann nur einmal vorkommen und die Reihenfolge ist egal. Die Zahl der Moeglichkeiten mit Reihenfolge ist gegeben durch $V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$. Bei k ausgewaehlten Elementen gibt es also $k!$ Moeglichkeiten die Reihenfolge zu veraendern. Man muss also die Formel fr V_n^k noch mit $\frac{1}{k!}$ erweitern: $K_n^k = \frac{n!}{(n-k)!*k!}$. Der Einfachheit halber kann man dies auch als Bionomalkoeffizient schreiben: $\binom{n}{k}$. Ausgesprochen wird dies als "n tief k". Da beides aufgeloest dasselbe ergibt, gilt die Symmetrieregel: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

4.3 Mengenlehre



In der Mengenlehre gibt es verschiedene Moeglichkeiten Mengen zu vereinigen:

- $A \cap B$ oder "A und B", setzt vorraus, dass das Element in beiden Mengen ist (gelber Bereich).
- $A \cup B$ oder "A oder B", setzt vorraus, dass das Element in einem oder beiden der Mengen ist (alle Bereiche).

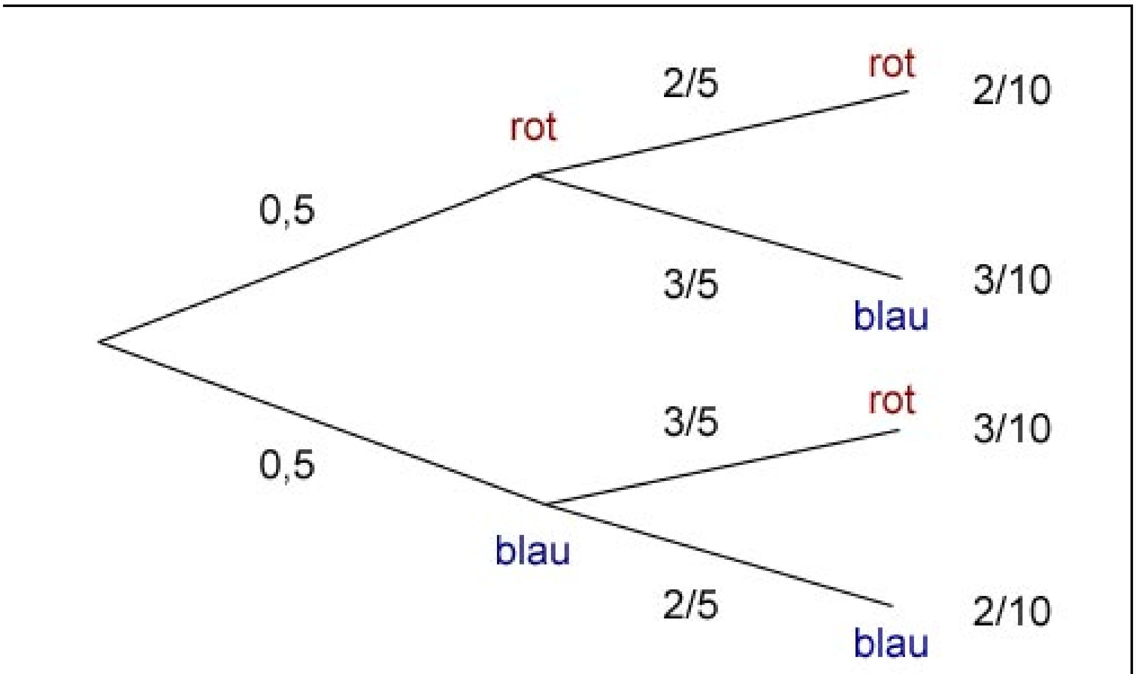
Dargestellt werden solche Mengen als Venn-Diagramme, wie oben dargestellt.

4.3.1 Additionssatz der Wahrscheinlichkeit

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Die Wahrscheinlichkeit einer Oder-Verknuepfung von Mengen wird wiefolgt hergeleitet: Betrachtet man zuerst die beiden Mengen einzeln erhalten wir ihre respektive Wahrscheinlichkeit. Addieren wir nun diese Wahrscheinlichkeiten zusammen, beruecksichtigen wir die Schnittmenge $A \cap B$ doppelt, da sie in beiden Mengen vorhanden ist. Man zieht also diese Wahrscheinlichkeit noch ab.

4.4 Mehrstufige Zufallsversuche



Werden mehrstufige Vergaenge betrachtet (z.B. das mehrfache Ziehen von Kugeln aus einer Urne), so stellt man den Vorgang am Besten als Baumdiagramm dar und leitet aus den Pfadregeln die Wahrscheinlichkeit her:

- Erste Pfadregel: Die Wahrscheinlichkeit eines Pfades ist das Produkt aller Wahrscheinlichkeiten im Pfad.
- Zweite Pfadregel: Bei Ereignisse mit mehreren Pfaden werden die Wahrscheinlichkeiten der Pfade addiert.

5 3x mindestens Aufgabe

Die "3x mindestens Aufgabe" ist ein Aufgabentyp der wiefolgt aussehen kann: In einem Stapel Karten befinden sich 3 Karten mit einem roten Bild und zwoelf Karten mit schwarzen Bildern. Wie oft muss man mindestens ziehen um mindestens mit einer Wahrscheinlichkeit von 98% mindestens eine rote Karte zu erhalten.

1. Ereignis: X Zahl der roten Karten $\rightarrow$ Ziel: X $\geq$ 1 (mindestens eine rote Karte):

$$p(rote) = \frac{3}{15} = \frac{1}{5} = 0.2$$

2. Gleichung $p(X \geq 1) \geq 0.98$

3. Gegenereignis "keine rote Karte" : X = 0

$$\rightarrow p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0)$$

4. Aufloesen:

$$\begin{aligned}
1 - 0.8^n &\geq 0.98 \\
0.02 &\geq 0.8^n \\
\log 0.02 &\geq \log 0.8^n \\
\log 0.02 &\geq n * \log 0.8 \\
\frac{\log 0.02}{\log 0.8} &\leq n \\
n &\geq 17.5
\end{aligned}$$

6 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Fuer eine Wahrschenlichkeit fuer ein Ereignis B unter der Vorraussetzung des Ereignisses A gilt:

$$p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$